Exercices de colle de MPSI

Table des matières

Chapitre 1

Logique, techniques élémentaires

1.1 Rudiments de logique et vocabulaire ensembliste

Exercice 1. (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. Écrire avec des quantificateur les propositions suivantes : (au plus une par élève)

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule jamais.
2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Exercice 2. (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. Écrire avec des quantificateur les propositions suivantes : (au plus une par élève)

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante.
2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend une infinité de fois la valeur 2.
3) La suite $(u_n)_{n\in N}$ prend une infinité de valeurs. (on suppose d'abord la suite à valeurs dans $\mathbb{N}$ si c'est plus facile, puis à valeurs dans $\mathbb{R}$ éventuellement)

Exercice 3. (solution) Démontrer formellement l'égalité entre les deux ensembles

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+y=3\} \quad \text{et} \quad B = \{(t-1, 5-2t)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in\mathbb{R}\}.$$

Exercice 4. (solution) Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer les ensembles $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que

$$(A\cap X)\cup(B\cap\overline{X}) = \varnothing.$$

Exercice 5. (solution) Soit E un ensemble. Soit A et B deux parties de E. On appelle différence symétrique de A et B la quantité notée

$$A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

1) Dessiner l'ensemble $A\Delta B$.
2) Démontrer que $A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ et que $A\Delta B = B\Delta A$.
3) Déterminer les parties X de E telles que $A\Delta X = A$.

Exercice 6. (solution) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

1.2 Ensembles de nombres, équations, inéquations

Exercice 7. $\star$ (solution) Soit $x \in \mathbb{R}$ non nul. On suppose que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
Indication : Calculer la quantité
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

Exercice 8. (solution) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}.$$

Exercice 9. $\star\star\star$ (solution) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$
Indication : étudier la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ définie sur $[0, 1]$.

Exercice 10. (solution) Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 11. (solution) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante :
$$\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1).$$

Exercice 12. (solution) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$, $\dfrac{\overline{z}+i}{iz+1} \in \mathbb{U}$.

Exercice 13. $\star\star$ (solution) Soit p, q deux réels fixés, on note $z = p + iq \in \mathbb{C}$. On fixe deux réels a et b. À quelle condition le complexe z est-il le produit d'un nombre complexe de partie réelle a et d'un nombre complexe de partie imaginaire b ?

1.3 Sommes, produits, coefficients binomiaux

1.3.1 Simplification de sommes

Exercice 14. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme suivante,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 15. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} kk!.$$

Exercice 16. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme suivante :

$$\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \max\{2^i, 2^j\}.$$

Résultat : $(2n-1)2^{n+1} + 3$.

Exercice 17. (solution) Soit $n \geqslant 2$. Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k - 1}.$$

Exercice 18. ⋆ (solution) On considère $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$F_0 = 0 \quad \text{et} \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{F_k F_{k+1}}.$$

1.3.2 Simplification de produits

Exercice 19. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2. Simplifier le produit suivant :

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 20. ⋆ (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer sans récurrence que :

$$\prod_{k=1}^{n} (4k - 2) = \prod_{k=1}^{n} (n + k).$$

1.3.3 Coefficients binomiaux

Exercice 21. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1}.$$

Exercice 22. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \binom{n+k}{k} = 2^n.$$

Exercice 23. (solution) Soit $p, n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} x^k.$$

Résultat : $\binom{n}{p}(1+x)^p$.

Exercice 24. $\star$ (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme suivante :

$$\sum_{\substack{0 \leqslant i,j,k \leqslant n \\ i+j+k=n}} \frac{1}{i!j!k!}.$$

Exercice 25. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

Indication : penser à la formule de Pascal.

Exercice 26. (solution) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{p-1} (k+j).$$

1.4 Nombres complexes et trigonometrie

Exercice 27. (solution) Soit $f : x \mapsto \sqrt{3}\cos x + \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'image de f et résoudre l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 28. (solution) Soit $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$. Étudier les variations de f sur son domaine de définition (à préciser). Reconnaître une fonction usuelle.

Exercice 29. (solution) Résoudre l'équation $\cos(3\theta) = \cos(4\theta)$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire que l'équation $8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$ admet (au moins) 4 solutions réelles.

Exercice 30. (solution) Résoudre l'équation $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 31. $\star\star$ (solution) Résoudre l'équation $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Indication : Montrer que si $0 < |\cos x| < 1$, alors x n'est pas solution.

Exercice 32. $\star\star$ (solution) Déterminer les rationnels a, b tels que $a^2 + b^2 = 1$.
Indication : On pourra se rappeler des formules reliant $t = \tan(\theta/2)$ à $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 33. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $z^n = \overline{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 34. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^{z^n} \in \mathbb{U}$.

Exercice 35. (solution) Résoudre l'équation $\mathrm{Re}(z^3) = \mathrm{Im}(z^3)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 36. $\star$ (solution) On considère L la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad L(z) = \ln|z| + i\arg(z),$$

où $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $e^{L(z)} = z$.
2) Exhiber deux complexes $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ tels que

$$z_1 z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \quad \text{et} \quad L(z_1 z_2) \neq L(z_1) + L(z_2).$$

3) Soit $z_0 = e^{-i\pi/4}$. Déterminer et représenter l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \mid z_0 z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \text{ et } L(z_0 z) = L(z_0) + L(z)\}.$$

Exercice 37. (solution) Dans le plan complexe, déterminer les intersections du cercle de centre 0 et de rayon 1 avec le cercle de centre 1 et de rayon 1.

Exercice 38. (solution) Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $z, z^2, \frac{1}{z}$ sont alignés.

Exercice 39. $\star$ (solution) Déterminer les complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que z, z^2 et z^3 forment les sommets d'un triangle rectangle.

Exercice 40. (solution) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ d'images A, B, C, D tels que

$$a + c = b + d \quad \text{et} \quad a + ib = c + id.$$

Montrer que les points A, B, C, D forment les sommets d'un carré.

Exercice 41. $\star\star$ (solution) On notera $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ d'images A, B, C. Montrer que les points A, B, C forment les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si

$$a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{et} \quad a + bj^2 + cj = 0.$$

1.5 Injections, surjections, bijections

1.5.1 Curiosités sur les entiers naturels

Exercice 42. (solution) Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(2n) = n \quad \text{et} \quad g(2n+1) = n.$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g, puis calculer $g \circ f$.

Exercice 43. $\star\star\star$ (solution)
1) Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles, chacun en bijection avec $\mathbb{N}$. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.
2) Montrer que l'ensemble des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exercice 44. $\star\star$ (solution) Soit f, g deux applications définies sur et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que f est surective, que g est injective et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant g(n)$. Montrer que g est bijective, puis montrer que $f = g$.
Indication : Travailler par récurrence.

Exercice 45. $\star\star$ (solution) Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) < n\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \geqslant n\}$.
1) Est-il possible que A et B soient tout deux infinis ?
2) Montrer que B est infini.
   Indication : supposer que B est fini et considérer le plus grand élément de $\sigma(B)$. On pourra ensuite s'intéresser à l'image de $\{0, \ldots, N\}$.

1.5.2 Quelques exemples d'ensembles usuels

Exercice 46. (solution) Étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y).$$

Exercice 47. (solution) On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$. Montrer que l'application

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

est une bijection de $\mathcal{H}$ dans lui-même et déterminer sa réciproque.

Exercice 48. $\star\star$ (solution) Soit l'ensemble $S_{\mathbb{Q}} := \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{Q} & \longrightarrow S_{\mathbb{Q}} \backslash \{(-1, 0)\} \\ t & \longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \end{cases}$$

est une surjection. En déduire une expression commode des solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (x, y) \in \mathbb{Q}^2.$$

Indication : Se souvenir des formules reliant $\cos x$ et $\sin x$ à $\tan x/2$.

Exercice 49. $\star$ (solution) Étudier l'injectivité et la surjectivité de la fonction $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ définie par

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad f(p, q) = p + \frac{1}{q}.$$

Exercice 50. $\star$ (solution) On considère l'application $F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + y, xy) \end{cases}$. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $F^{-1}\{(a, b)\}$. L'application F est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 51. $\star\star$ (solution) Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{U}_p$ l'ensemble des racines p-ièmes de l'unité. Déterminer l'ensemble des bijections $f : \mathbb{U}_p \to \mathbb{U}_p$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{U}_p, \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Indication : Montrer que l'image de $e^{\frac{2i\pi}{p}}$ par f détermine entièrement f.

1.5.3 Applications entre ensembles abstraits

Exercice 52. (solution) Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \varphi(A) = f(A).$$

Montrer que φ est injective si et seulement si f est injective.

Exercice 53. (solution) Soit E un ensemble et f, g, h des applications définies de E dans lui-même. On suppose que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et que $h \circ f \circ g$ est surjective. Montrer que f, g et h sont des bijections.

Exercice 54. (solution) Soit E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On note

$$h : \begin{cases} E & \longrightarrow F \times G \\ x & \longmapsto (f(x), g(x)) \end{cases}.$$

Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective. Étudier la réciproque.

Exercice 55. $\star$ (solution) Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est bijective si et seulement si pour toute partie $A \subset E$, $f(A^c) = f(A)^c$, où A^c désigne le complémentaire de A.

1.6 Relations binaires

Exercice 56. $\star\star$ (solution) Soit E un ensemble fini de cardinal n muni d'une relation d'ordre $\leqslant$, qu'on ne suppose pas nécessairement totale. Montrer qu'il existe une bijection croissante de E dans $\{1, \dots, n\}$.

Exercice 57. $\star$ (solution) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note $\sim$ la relation binaire définie sur A par

$$\forall x, y \in A, \quad x \sim y \quad \text{ssi} \quad]x, y[\subset A \text{ ou }]y, x[\subset A.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur A et déterminer les parties bornées de $\mathbb{R}$ n'ayant qu'une classe d'équivalence pour $\sim$.

Exercice 58. (solution) Soit E un ensemble. On considère la relation binaire suivante sur E^E,

$$\forall f, g \in E^E, \quad f \sim g \quad \text{ssi} \quad \exists\, m, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } f^n = g^m.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Si f est injective (resp. surjective), que dire de la classe d'équivalence de f ? On considère maintenant la relation binaire

$$\forall f, g \in E^E, \quad f \simeq g \quad \text{ssi} \quad \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } f^n = g^n.$$

Montrer que les classes d'équivalences de $\simeq$ sont des réunions de classes d'équivalences de $\sim$.

Chapitre 2

Analyse réelle et complexe

2.1 Rappels et compléments sur les fonctions

2.1.1 Étude de fonctions

Exercice 59. (solution) Soit $f : x \mapsto \exp(\ln^2 x)$. Montrer que f est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser) et calculer une expression explicite de sa réciproque.

Exercice 60. (solution) Déterminer les réels b tels que la fonction $f : x \mapsto x^3 + bx^2 + x$ est injective sur $\mathbb{R}$.

Exercice 61. (solution) Déterminer l'allure du graphe de la fonction $f : x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$. Déterminer une partie A de $\mathbb{R}$ telle que f est une bijection de A sur l'image de $\mathbb{R}$ par f (à préciser). On pourra par exemple calculer $f(-\frac{5}{2})$.

Exercice 62. (solution) Soit $f : x \mapsto (3 - x^2)e^{-x}$. Discuter, en fonction de la valeur réel m, du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ d'inconnue x.

Exercice 63. (solution) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. Discuter, en fonction de la valeur réel m, du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ d'inconnue x.

Exercice 64. (solution) Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ (dont on précisera l'intervalle de définition) puis étudier ses variations.

2.1.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 65. ⋆ (solution) Montrer que toute fonction polynomiale réelle de degré impaire définie sur $\mathbb{R}$ s'annule au moins une fois. On rappelle qu'une fonction polynomiale réelle de degré n est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels fixés tel que $a_n \neq 0$. Est-ce toujours vrai si l'on suppose f de degré pair ?

Exercice 66. (solution) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 67. ⋆⋆ (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $f \circ f(a) = a$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 68. (solution) Résoudre l'équation

$$a^b = b^a, \quad a, b \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 69. ⋆ (solution) Déterminer les fonctions $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x)^2 = 1 - x^2.$$

2.1.3 Fonctions hyperboliques

Exercice 70. (solution) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Discuter en fonction de α du nombre de solutions de l'équation

$$e^x(\alpha - x) = e^{-x}(\alpha + x).$$

Exercice 71. (solution) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\operatorname{th}(x) < x < \operatorname{sh}(x).$$

Exercice 72. (solution) Montrer que pour tour réel x non-nul,

$$\operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$$

En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x).$$

Exercice 73. (solution) Montrer que l'équation

$$\operatorname{ch}^{-1}(x) + \operatorname{sh}^{-1}(x) = 1$$

admet une unique solution dans $[1, +\infty[$, puis la déterminer.

2.1.4 Autres

Exercice 74. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 75. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. On suppose que la fonction $\ln(f)$ est convexe (on dit que f est logarithmiquement convexe). Montrer que pour $\alpha > 0$, f^α est convexe.

Exercice 76. ⋆ (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g : x \mapsto f(x-1) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto f(x+1)$$

sont paires. Montrer que f est périodique.
Alternativement : (⋆⋆) une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle admettre exactement deux axes de symétrie verticaux ?

Exercice 77. ⋆⋆⋆ (solution) Montrer sans récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Indication : étudier la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ définie sur $[0, 1]$.

2.2 Techniques élémentaires de calcul intégral

2.2.1 Techniques usuelles de primitivation

Exercice 78. (solution) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Exercice 79. (solution) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x}$.

Exercice 80. (solution) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$.

Exercice 81. (solution) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan} x}{x^2}$.

Exercice 82. ⋆ (solution) Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \tan^3(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{\tan^3(x)}.$$

Exercice 83. (solution) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right)$.
Indication : Faire un changement de variables, puis, pour minimiser les calculs, attendre un peu avant de calculer explicitement la dérivée de la fonction du changement de variables. On pourra astucieusement la primitiver à nouveau.

2.2.2 Quelques techniques et exemples d'intégrales plus élaborés

Exercice 84. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression explicite de

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 85. (solution) Pour tout $x, y > 0$, on note

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $x, y > 0$, $B(x,y) = B(y,x)$ et $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ une expression explicite de

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Exercice 86. (solution) Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. Donner une expression explicite de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x.$$

Exercice 87. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression explicite de

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 88. ⋆ (solution) On rappelle que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression explicite de

$$I_n = \int_0^1 (x \ln x)^n \mathrm{d}x.$$

Solution : $I_n = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

Exercice 89. ⋆ (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x.$$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Déterminer une expression de I_n sous la forme d'une somme.
   Indication : On pourra exprimer I_{n+2} en fonction de I_n.
3) En déduire que les sommes infinies

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

   ont un sens et déterminer leur valeur.

Exercice 90. ⋆ (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$, où

$$I_n = \int_0^1 x^n \tan x \mathrm{d}x.$$

2.2.3 Intégration sur des fonctions abstraites

Exercice 91. (solution) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 92. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique, de période $T > 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 93. ⋆ (solution) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_0^\pi t f(\sin t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t)\mathrm{d}t.$$

En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de

$$I_n = \int_0^\pi \frac{t \sin^{2n} t}{\sin^{2n} t + \cos^{2n} t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 94. (solution) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ que l'on suppose convexe. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$$

est elle aussi convexe.

Exercice 95. (solution) Soit $f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$

Déterminer une relation entre les $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ si l'on suppose f paire, puis calculer les $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ pour la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$.

2.3 Limite d'une suite

2.3.1 Quelques limites de suites en vrac

Exercice 96. (solution) Déterminer la limite (si elle existe) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Exercice 97. (solution) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite (si elle existe) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

Exercice 98. (solution) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier, en fonction du paramètre a, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a^k).$$

Exercice 99. (solution) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer (si elle existe) la limite de la suite $(\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 100. $\star\star$ (solution) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

converge et déterminer sa limite.

Exercice 101. $\star$ (solution) Déterminer la limite (si elle existe) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Indication : Étudier la convergence des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 102. $\star$ (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \tan x \mathrm{d}x.$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 103. $\star$ (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x.$$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Déterminer une expression de I_n sous la forme d'une somme.
   Indication : On pourra exprimer I_{n+2} en fonction de I_n.
3) En déduire que les sommes infinies

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

   ont un sens et déterminer leur valeur.

Exercice 104. $\star\star\star$ (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \mathrm{d}x.$$

Déterminer la limite de la suite $(W_{n+1}/W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.3.2 Suites définies par récurrence

Exercice 105. $\star$ (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{u_n}.$$

Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 106. (solution) On considère $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$F_0 = 0 \quad \text{et} \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

2) En admettant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ existe et est finie, en déduire que la somme infinie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{F_k F_{k+1}}$$

   a un sens et déterminer sa valeur.

Exercice 107. $\star\star\star$ (solution) Soit $a, b > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par récurrence par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes, puis étudier leur limite.
Indication : On pourra étudier la monotonie des deux suites, et se rappeler que $u_n - u_0 = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$.

Exercice 108. (solution) Soit $f : x \mapsto \ln(e - 1 + x)$. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier cette suite.

Exercice 109. (solution) Soit $a \in [1, +\infty[$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par

$$u_0 = a,\ v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_n = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}$$

convergent.

2.3.3 Limites de suites abstraites

Exercice 110. ⋆ (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Étudier la convergence de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 111. (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant a$ et $v_n \leqslant b$. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = a + b$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.

Exercice 112. ⋆⋆ (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente à coefficients entiers. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.
Indication : Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Exercice 113. (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante telle que la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 114. (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant

$$\forall k, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 115. ⋆⋆ (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $2u_n + u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente de limite nulle.

2.3.4 Suites extraites et Bolzano-Weierstrass

Exercice 116. (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée. Montrer que $+\infty$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 117. (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que,

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 118. (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ une suite décroissante de limite nulle et soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
Indication : Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite.

Exercice 119. (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 120. ⋆⋆⋆ (solution) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée qui admet une unique valeur d'adhérence.

i. Montrer que u_n est convergente.

ii. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $a_n + b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

2.4 Limites d'une fonction et continuité

2.4.1 Définition de la limite et de la continuité

Exercice 121. (solution) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est continue.
Indication : montrer que f est continue à gauche et à droite.

Exercice 122. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction nulle sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et telle que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ avec $p \wedge q = 1$, $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$. Étudier la continuité de f.

Exercice 123. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto f(x)^3$ est continue. Montrer que f est continue. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point et telle que $x \mapsto f(x)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 124. (solution) Soit f une fonction lipschitzienne. Montrer que l'ensemble des réels $k > 0$ tels que f est k-lipschitzienne est de la forme $[a, +\infty[$.

Exercice 125. (solution) Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = f(1)$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x^2) \leqslant f(x)$.

2.4.2 Les théorèmes fondamentaux

Exercice 126. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} |f| = +\infty$. Montrer que f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$.

Exercice 127. (solution) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 128. (solution) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, 1[$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 129. (solution) Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est liée dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, où par convention $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 130. (solution) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sup_{y\in[x,x+1]} f(y).$$

Montrer que g est bien définie et continue.

Exercice 131. (solution) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que l'image réciproque par f d'un singleton est de cardinal 0 ou 2.

Exercice 132. (solution) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a > 0$. On suppose que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)| > a|x - y|$. Montrer que f est bijective.

2.5 Dérivabilité

2.5.1 Définition de la dérivabilité, extremas

Exercice 133. (solution) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in]0, 1[$, $b \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = ax + b$. Montrer que f est affine, puis la déterminer.
Indication : Montrer que $f'(ax + b) = f'(x)$.

Exercice 134. (solution) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable. On note

$$g : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

Étudier la dérivabilité de g.

Exercice 135. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = e^x + x$. Montrer que f est bijective, puis que f^{-1} est deux fois dérivable, et déterminer enfin $(f^{-1})'(1)$ et $(f^{-1})''(1)$.

Exercice 136. (solution) Soit $f \in \mathscr{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' \geqslant f$. Montrer que f est à valeurs négative.
Indication : S'intéresser au maximum de f.

2.5.2 Théorème de Rolle, accroissements finis

Exercice 137. (solution) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 138. (solution) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = e$. Montrer qu'il existe un point $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

Exercice 139. (solution) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0, 1]$. Montrer que pour tout $a, b > 0$, il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$a\frac{f'(c)}{f(c)} = b\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

Exercice 140. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 141. (solution) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) < 0$.

Exercice 142. (solution) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ tel que $f'(x_1) + \cdots + f'(x_n) = n$.
Indication : Appliquer le théorème des accroissements finis sur les intervalles $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$.

Exercice 143. (solution) Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x + 1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$. En déduire la valeur de $\left(\frac{1}{\ln n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 144. (solution) Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x + 1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$. En déduire la valeur de $\left(\sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k}\right)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 145. (solution) Étudier la limite de la suite $\left(\frac{n^2}{\ln(n)}\left(n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right)\right)_{n \geqslant 2}$.

2.6 Convexité

Exercice 146. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $\ln \circ f$ est convexe, alors pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.

Exercice 147. (solution) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que l'on suppose convexe. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$$

est elle aussi convexe.

Exercice 148. (solution) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, convexe et bijective. Que dire de la convexité de f^{-1} ?

Exercice 149. (solution) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes et impaires.

Exercice 150. (solution) Soit $f \in \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ supposée convexe. Montrer que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 151. (solution) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y > 0$, $(x + y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

Exercice 152. (solution) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 153. (solution) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique, *i.e.* à coefficients positifs et dont la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne vaut 1. Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ à coefficients strictement positifs et $Y = AX$. Montrer que $\prod_{i=1}^n y_i \geqslant \prod_{i=1}^n x_i$.

2.7 Analyse asymptotique 1

Exercice 154. (solution) Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes,

a) $(n = 3)$, $x \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}x - \ln(1+x)}{\sin(3x)}$

b) $(n = 5)$, $x \mapsto \mathrm{Arccos}(x)$.

Exercice 155. (solution) Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général

a) $\sin\left(\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} - \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}\right)$.

b) $\mathrm{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}(n^2)\right)$.

Exercice 156. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer un développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!})$, puis à l'ordre $n + 1$.

Exercice 157. (solution) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ en 0 et montrer que f n'y est pas deux fois dérivable.

Exercice 158. (solution) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{a}{\ln(1+x)} + \frac{b}{e^x - 1}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Montrer qu'alors il existe une constante $C > 0$ à déterminer telle que $f(x) \sim Cx^2$.

Exercice 159. (solution) Étudier la limite de la suite de terme général

a) $\frac{\ln(n+1)-\ln(n+2)}{\sin(\frac{n+1}{n^2+1})}$

b) $\sqrt{n^4+3n^3}-2\sqrt{n^4-2n^3}+\sqrt{n^4+n^3}$

Exercice 160. (solution) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 161. (solution) Montrer que la fonction suivante admet une asymptote en $+\infty$, puis étudier la position relative de cette asymptote par rapport au graphe de f.

a) $x \mapsto \frac{x^2}{x+1}\text{Arctan}x$

b) $x \mapsto (x^2-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 162. (solution) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n - \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

sont adjacentes (on ne demande pas leur limite).

Solutions.

154)

a) $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6}x - \frac{2}{9}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

b) $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$.

155)

a) $\frac{1}{4}\sqrt{n}\ln n$

b) $\frac{2}{\sqrt{\pi n}}$

156) $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$.

158) $a = b = -\frac{1}{2}$ et $C = -\frac{1}{48}$.

159)

a) -1.

b) $-\frac{1}{4}$.

160) $n^2 u_n = \exp(-\sqrt{n} + O(\frac{1}{\sqrt{n}}) - 2\ln(n))$.

161)

a) $f(x) \underset{x\to +\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1 + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.

b) $f(x) \underset{x\to +\infty}{=} 2x - \frac{4}{3x} + o(\frac{1}{x})$.

162) $v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{2n^2} \leqslant 0$.

Chapitre 3

Algèbre générale et linéaire

3.1 Arithmétique des entiers relatifs

3.1.1 Congruences et compagnie

Exercice 163. $\star\star$ (solution) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Déterminer l'ensemble

$$\{\omega \in \mathbb{U}_n \mid \forall \zeta \in \mathbb{U}_n,\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \zeta = \omega^k\}.$$

Exercice 164. (solution) Montrer que l'équation suivante n'a pas de solution,

$$x^3 + y^3 + z^3 = 94, \quad (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$$

Indication : Projeter modulo 9.

Exercice 165. (solution) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \mod 7$.

Exercice 166. (solution) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} + 15n - 1 \equiv 0 \mod 9$.

3.1.2 PGCD, Gauss et Euclide

Exercice 167. (solution) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. Montrer que $(a+b) \wedge (a^2 - 3ab + b^2) \in \{1, 5\}$.

Exercice 168. $\star$ (solution) Soit $x \in \mathbb{R}^{\times}$. On suppose qu'il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tel que x^m et x^n sont entiers. Montrer que x est un entier (on pourra d'abord montrer que x est rationnel).

Exercice 169. $\star$ (solution) Soit $x \in \mathbb{Q}$. On suppose qu'il existe une équation polynomiale à coefficients entiers de la forme

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$$

dont x est une racine. Montrer que x est un entier.

Exercice 170. $\star$ (solution) Résoudre l'équation diophantienne d'inconnues $x, y \in \mathbb{N}$,

$$(x + 1)(y + 2) = 2xy.$$

Indication : Utiliser Gauss à répétition et distinguer l'étude selon la parité de y. *Solution :* $(x, y) \in \{(2, 6), (3, 4), (5, 3)\}$.

3.1.3 Nombres premiers

Exercice 171. (solution) Soit $d \geqslant 2$ un entier. En utilisant l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, déterminer une injection de $\mathbb{N}^d$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 172. (solution) Soit n un entier naturel qui est à la fois un carré et un cube parfait. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $n = u^6$.

Exercice 173. (solution) Résoudre l'équation diophantienne d'inconnue $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$3x^2 + xy = 11.$$

Exercice 174. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. Déterminer les entiers $m \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ vérifiant $m^r \equiv 0 \mod n$.

Exercice 175. $\star\star\star$ (solution) Après avoir donné un sens à cette formule, montrer que pour tout nombre premier $p > 3$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \mod p^2.$$

3.2 Structures de groupe et d'anneau

3.2.1 Groupes et sous-groupes

Exercice 176. (solution) On note

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad M_x = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 + \frac{x^2}{2} & \frac{x^2}{2} \\ -x & -\frac{x^2}{2} & 1 - \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

et $\mathscr{G} = \{M_x \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.
Indication : Calculer $M_x M_y$ le plus tôt possible.

Exercice 177. $\star$ (solution) Soit $\mathscr{G}$ un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ distinct de $\{0\}$. On suppose que pour tout élément $M \in \mathscr{G}$,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AMB \in \mathscr{G}.$$

Montrer que $\mathscr{G} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Indication : Montrer que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $E_{ij} \in \mathscr{G}$.

Exercice 178. (solution) Soit H un sous-groupe borné de $\mathbb{C}^*$, *i.e.* il existe $K > 0$ tel que pour tout $z \in H$, $|z| \leqslant K$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

Exercice 179. $\star\star$ (solution) Déterminer les sous-groupes G de $\mathbb{R}$ tels que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est minoré par un réel strictement positif.

Exercice 180. (solution) Soit G un groupe et H une partie finie de G stable par la loi de G. Montrer que H est un sous-groupe de G.
Indication : Pour $x \in H$, étudier l'injectivité de l'application $k \mapsto x^k$ définie sur $\mathbb{N}$.

Exercice 181. (solution) Soit G un groupe. On dit qu'un sous-groupe $H < G$ est distingué si pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} \subset H$, *i.e.* pour tout $h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

1) On suppose G abélien. Déterminer tous les sous-groupes distingués de G.
2) Soit $H < G$ un sous-groupe de G. Montrer que l'ensemble $K = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 182. $\star$ (solution) Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On définit sur G la relation binaire $\sim$ par
$$\forall x, y \in G, \quad x \sim y \quad \text{ssi} \quad x^{-1}y \in H.$$

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G, puis montrer que les classes d'équivalences de $\sim$ sont les xH, avec x décrivant G.
2) On définit maintenant la loi de composition interne $\star$ sur les classes d'équivalences $G/\sim$ par
$$\forall x, y \in G, \quad xH \star yH = (xy)H.$$
Cette définition dépend à priori des représentatnts des classes d'équivalences choisis. Montrer que $\star$ est bien définie (*i.e.* si $x \sim x'$ et $y \sim y'$, alors $xyH = x'y'H$) si et seulement si pour tout $x \in H$, $xHx^{-1} = H$. Dans ce cas, vérifier que $\star$ munit H d'une loi de groupe

Exercice 183. $\star\star$ (solution) Soit G un groupe possédant un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

3.2.2 Morphismes de groupes

Exercice 184. $\star\star$ (solution) Soit G un groupe.

1) À quelle condition sur G l'application $g \in G \mapsto g^2$ est-elle un endomorphisme de groupes de G.
2) On suppose maintenant G abélien de cardinal impair. Montrer que tout élément de G est un carré, *i.e.* $\forall g \in G,\ \exists h \in G,\ g = h^2$.
Indication : Utiliser le théorème de Lagrange sur l'ordre des éléments d'un groupe.

Exercice 185. (solution) Montrer que le groupe $\mathbb{C}^*$ est isomorphe au groupe produit $\mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 186. $\star$ (solution) Soit G un groupe fini. Montrer que tout morphisme de groupes de $\mathbb{Q}$ dans G est constant.

Exercice 187. (solution) Soit G un groupe. On dit qu'un sous-groupe H de G est caractéristique s'il est stable par tout automorphisme de G.
Montrer que le centre $Z(G)$ de G est un sous-groupe caractéristique de G.

Exercice 188. $\star\star$ (solution) Soit G un groupe. On suppose que G est monogène, c'est-à-dire qu'il existe $g \in G$ tel que $G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G est isomorphe à l'un des $\mathbb{U}_n$ ou à $\mathbb{Z}$.

Exercice 189. $\star$ (solution) Soit G, H deux groupes et $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ un morphisme de groupes. On définit la loi de composition interne $\star$ sur $G \times H$ par
$$\forall (g,h), (g',h') \in G \times H, \quad (g,h) \star (g',h') = (g \cdot \varphi(h)(g'), hh').$$
Montrer que $(G \times H, \star)$ est un groupe. On pourra dans un premier temps admettre que $\star$ est associative.

3.2.3 Anneaux et corps

Exercice 190. (solution) Soit A un anneau et E un ensemble. Montrer que $\mathrm{U}(\mathcal{F}(E, A)) = \mathcal{F}(E, \mathrm{U}(A))$.

Exercice 191. (solution) Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G. Pour $f, g \in \mathrm{End}(G)$, on note
$$\forall x \in G, (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad f \circ g(x) = f(g(x)).$$
Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 192. $\star\star$ (solution) Soit A un anneau commutatif intègre. On suppose que A est fini. Montrer que A est un corps.

Exercice 193. (solution) Soit K, L deux corps et $f : K \to L$ un morphisme d'anneaux. Montrer que f est injectif.

Exercice 194. (solution) Soit A un anneau et $a \in A$. On dit que $r \in A$ est une racine carrée de a si $r^2 = a$. Montrer que si A est commutatif et intègre, alors tout élément de A admet au plus deux racines carrées.

Exercice 195. (solution) Soit A un anneau. Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A, puis déterminer la forme de leurs noyaux.

Exercice 196. $\star\star$ (solution) Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note $A_d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \equiv y \mod d\}$. Montrer les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$ sont exactement les A_d, $d \in \mathbb{N}^*$.
Indication : Pour un sous-anneau A de $\mathbb{Z}^2$, considérer $d = \min\{|x - y| \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \neq y\}$.

Exercice 197. $\star\star$ (solution) Soit $K = \{0, 1, a, b\}$ un corps que l'on suppose posséder quatre éléments. Dresser les tables d'addition et de multiplication de K.
Indication : Montrer que $ab = 1$ puis que $2 = 0$ dans K.

3.3 Polynômes

Exercice 198. (solution) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 199. $\star$ (solution) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients entiers. On suppose que $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs. Montrer que P n'a pas de racine entière.

Exercice 200. (solution) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.

Exercice 201. (solution) Soit $P = X^{311} + X^{82} + X^{15}$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$. Montrer que $Q(X)$ divise $P(X)$. En est-il de même pour $Q(X)^2$?

Exercice 202. (solution) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $(X^4 + 1)^n - X^n$.

Exercice 203. (solution) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 204. (solution) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 205. (solution) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$.

Exercice 206. (solution) Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} X^k$. Montrer que $P(X)$ divise $P(X^2)$.

Exercice 207. (solution) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $X - 1$ divise $P(X^n)$. Montrer que $X^n - 1$ divise $P(X^n)$ également.

Exercice 208. (solution) Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\cos a_k + X \sin a_k)$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

Exercice 209. $\star\star$ (solution) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \quad P(xy) = P(x)P(y).$$

Exercice 210. ⋆⋆ (solution) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que $P(X^2) = -P(X)P(X+1)$.
Indication : Montrer que les racines non nulles de P sont de module 1, puis que ce sont des racines 6-ièmes de l'unité, puis que ce sont nécessairement 1 ou 0 et conclure.

Exercice 211. (solution) Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine double de $P^2 + Q^2$, alors α est une racine de $P'^2 + Q'^2$.

Exercice 212. ⋆ (solution) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Exercice 213. ⋆⋆⋆ (solution) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non-constant. Montrer que les racines de P' sont des barycentres à coefficients positifs des racines de P, *i.e.* si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ sont les racines de P, pour toute racine α de P', il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ tels que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Indication : Caculer P'/P.

Exercice 214. (solution) Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ tels que $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Montrer que le triplet (x, y, z) est proportionnel à $(1, j, j^2)$ ou à $(1, j^2, j)$.

Exercice 215. ⋆⋆ (solution) Montrer qu'il existe un nombre fini de polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers et à racines de module inférieur ou égal à 1.

3.4 Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles

3.4.1 Arithmétique des polynômes

Exercice 216. (solution) Soit $R \in \mathbb{R}(X)$ non nul tel que l'évaluation de R en la fraction rationnelle $\frac{X^2}{1+X^2}$ est un polynôme. Montrer que 1 est un pôle de R.

Exercice 217. (solution) Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux avec B non constant. On considère f l'application qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$, puis déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 218. (solution) Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires de degré 3, divisibles par $X - 1$ et tels que les restes des divisions euclidiennes par $X - 2, X - 3$ et $X - 4$ sont égaux.

3.4.2 Fractions rationnelles

Exercice 219. (solution) Déterminer un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exercice 220. (solution) Soit $P = (X-1)(X-2)^2$, $Q = X(X-2)^2$ et $Q = X(X-1)$. Déterminer des coefficients de Bézout pour P, Q, R, *i.e.* des polynômes U, V, W tels que

$$UP + VQ + WR = 1.$$

Indication : Utiliser la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2}$.

Exercice 221. (solution) Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}.$$

Exercice 222. ⋆⋆ (solution) Soit $n \geqslant 2$ et $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les racines n-ièmes de l'unité. Réduire (sous la forme P/Q) la fraction rationnelle

$$R(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega_k^2}{X - \omega_k}.$$

Exercice 223. (solution) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, dont on note les racines $x_1, \ldots, x_n$ et que l'on suppose non nulles. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P'(0)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} = 0.$$

Indication : Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(X)}$.

3.5 Matrices et systèmes linéaires

Exercice 224. (solution) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de A, puis déterminer $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercice 225. (solution) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices symétriques. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que AB soit symétrique.

Exercice 226. (solution) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec D. En déduire les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices diagonales.

Exercice 227. (solution) Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{N}_p$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $a_{ij} = 0$ si $j < i + p$. Montrer que tout élément de $\mathcal{N}_1$ est nilpotent.
Indication : Montrer que $\mathcal{N}_p \mathcal{N}_q \subset \mathcal{N}_{p+q}$.

Exercice 228. (solution) Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ z & \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(z) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est une injection qui vérifie : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \varphi(zz') = \varphi(z)\varphi(z')$.
En déduire les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, pour $\theta = \frac{2\pi}{n}$.

Exercice 229. (solution) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$. Montrer que $A = B$.

Exercice 230. ⋆⋆ (solution) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $X + {}^{t}X = \mathrm{Tr}(X)A$.

Exercice 231. (solution) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Tr}({}^{t}AA) = 0$.

Exercice 232. ⋆ (solution) Pour $M \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de M.

1) Montrer que si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, alors $\overline{MN} = \overline{M} \cdot \overline{N}$ et que $\mathrm{Tr}({}^{t}\overline{A}A) \geqslant 0$.

2) Soit maintenant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = \lambda X$, alors λ est un imaginaire pur.
Indication : Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, ${}^{\mathrm{t}}\overline{X}X$ est une matrice de dimension 1×1, c'est-à-dire un nombre complexe !

Exercice 233. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A = (\zeta^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Déterminer $A\overline{A}$, puis l'inverse de A (où $\overline{A}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A).

Exercice 234. (solution) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB - BA = I_n$.

Exercice 235. (solution) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 236. $\star$ (solution) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + M^{-1} = I_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, déterminer $M^p + M^{-p}$.
Indication : Travailler par récurrence sur p.

3.6 Structure d'espace vectoriel

3.6.1 Bases, familles libres et liées

Exercice 237. (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}$. On note $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ et $v_i = u + e_i$ pour $i = 1, \dots, n$.
Déterminer une condition nécessaire sur les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pour que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ soit liée.

Exercice 238. (solution) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(x \mapsto \sin x, x \mapsto \sin(x+a), x \mapsto \cos(x+b))$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est liée.

Exercice 239. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{K}$ distincts. On note F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ dont a et b sont racines. Montrer que F est un espace vectoriel, puis en déterminer la dimension.

Exercice 240. (solution) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice, $p \in \{1, \dots, n\}$ un entier, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et $e_1, \dots, e_p \in \mathbb{K}^n$ des vecteurs tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $Me_i = \lambda_i e_i$.
Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre.

Exercice 241. (solution) Soit $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$. Soit $\mathcal{C}(D)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec D. Montrer que $\mathcal{C}(D)$ est un espace vectoriel, puis montrer que la famille $(D^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ en est une base.

Exercice 242. (solution) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice qui stabilise toutes les droites de $\mathbb{K}^n$, *i.e.* pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^n$, $Mx \in \mathrm{Vect}(x)$. Montrer que M est une matrice scalaire.

Exercice 243. (solution) Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tel que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions affines sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$. Déterminer une base de F.

3.6.2 Bases et dimension finie

Exercice 244. (solution) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E constitué uniquement de fonctions positives. Montrer que F est de dimension au plus égale à 1.

Exercice 245. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = X^k(X-1)^{n-k}$. Montrer que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 246. (solution) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $p \leqslant n$.
Indication : Pour un vecteur $x_0 \in \mathbb{K}^n$ bien choisi, considérer la famille $(x_0, Mx_0, \dots, M^{p-1}x_0)$.

Exercice 247. (solution) Soit $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Pour $X \subset G$, on note $C_G(X) = \{g \in G \mid \forall x \in X, gx = xg\}$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble $X_0 \subset X$ fini tel que $C_G(X) = C_G(X_0)$.

Exercice 248. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $u \in \mathbb{R}^n$ est un barycentre d'éléments de A s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$, des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_+$ et des élements $x_1, \dots, x_r \in A$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{r} x_i \lambda_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Montrer que tout barycentre de A peut s'écrire comme un barycentre d'au plus $n+1$ éléments de A (*i.e.* on peut remplacer r par $n+1$ dans la définition précédente).

3.6.3 Sommes directs, supplémentaires

Exercice 249. (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $F \cap G = F + G$, alors $F = G$.

Exercice 250. (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subset H$. Montrer que $G = H$.

Exercice 251. (solution) Montrer que $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 252. (solution) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer un supplémentaire de F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par P.

Exercice 253. (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous espaces vectoriels de même dimension. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

3.7 Applications linéaires

3.7.1 Applications linéaires explicites

Exercice 254. (solution) Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux avec B non constant. On considère f l'application qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$, puis déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 255. ⋆ (solution) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomorphisme défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = P - P'.$$

Montrer que f est bijectif, puis en déterminer une réciproque explicite (plus dur).
Indication : Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $P - P^{(n+1)}$ en fonction de $P, P', \dots, P^{(n)}$.

Exercice 256. (solution) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme défini pour tout polynôme $P \in E$ par $f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de f. Montrer ensuite que pour tout $Q \in \mathrm{Im}(f)$, il existe un unique $P \in E$ tel que $X^2 | P$ et $f(P) = Q$.
Indication : On pourra s'intéresser à l'image des X^p par f.

Exercice 257. ⋆ (solution) Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tel que $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions affines sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,n-1$. Déterminer la dimension de F.
Indication : Plutôt que d'exhiber une base de F, on pourra considérer l'application $f \in F \mapsto (f(x_i))_{0\leqslant i\leqslant n}$.

3.7.2 Applications linéaires abstraites

Exercice 258. ⋆⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E$ non nul. Déterminer tous les endomorphismes $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que pour tout $x \in E$, la famille $(u, x, f(x))$ est liée.

Exercice 259. ⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\mathrm{Id}_E - f$ est un automorphisme de E et donner une expression de sa réciproque.

Exercice 260. (solution) Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et G_1, G_2 deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. On suppose que f est injective. Montrer que $f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1) \oplus f(G_2)$. Le résultat reste-t-il vrai sans injectivité ?

Exercice 261. (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f + g \in \mathrm{GL}(E)$ et $g \circ f = 0$. Montrer que $n = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

Exercice 262. ⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$ et $P(0) = 0 \neq P'(0)$. Montrer que $E = \mathrm{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 263. (solution) Soit $E_0, \dots, E_{k+1}$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie avec $E_0 = E_{k+1} = 0$ et pour tout $0 \leqslant i \leqslant k$, soit $f_i \in \mathscr{L}(E_i, E_{i+1})$. On suppose que $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$. Montrer que
$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \dim(E_i) = 0.$$

Exercice 264. ⋆⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et K, I deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Montrer que l'ensemble
$$G = \{f \in \mathscr{L}(E) \mid \mathrm{Ker}(f) = K \text{ et } \mathrm{Im}(f) = I\}$$
est un groupe pour la composition (on pourra se passer de montrer l'associativité).

Exercice 265. ⋆⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence
$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \quad \text{ssi} \quad f^2 = 0 \quad \text{et} \quad \exists g \in \mathscr{L}(E), f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}_E\,.$$

Exercice 266. ⋆⋆⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (non supposé de dimension finie !) et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour $f \in \mathscr{L}(G,F)$, on note $V_f = \{x + f(x) \mid x \in G\}$.

1) Montrer que pour tout supplémentaire S de F, il existe une unique application $f \in \mathscr{L}(G,F)$ telle que $S = V_f$.
Indication : Montrer que $\forall x \in G, \exists! y \in F, x + y \in S$.
2) En déduire que tous les supplémentaires de F sont isomorphes.

Exercice 267. ⋆⋆⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que f stabilise toutes les droites de E. Montrer que f est une homothétie.
2. Soit $k \in \{2, \dots, n-1\}$. On suppose que f stabilise tous les sous-espaces de E de dimension k. Que dire de f ?
Indication : On poura montrer qu'un sous-espace de dimension $k-1$ est l'intersection de deux sous-espaces de dimension k.

Exercice 268. ⋆⋆⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{L}(E)$ que l'on suppose nilpotents qui commutent deux à deux. Montrer que $f_1 \circ \dots \circ f_n = 0$.
Indication : Montrer que f_k stabilise $\mathrm{Im}(f_{k+1} \circ \dots \circ f_n)$.

3.7.3 Formes linéaires

Exercice 269. (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Déterminer toutes les formes linéaires injectives de E.
Indication : La réponse dépend de la dimension...

Exercice 270. ⋆ (solution) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts. On note $\varphi_k \in E^*$ la forme linéaire définie pour tout $P \in E$ par $\varphi_k(P) = P(a_k)$. Montrer que la famille $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ forme une base de E^*.

Exercice 271. ⋆⋆⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $p \in \{1, \dots, n\}$ et des formes liénaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$. Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre si et seulement si l'application

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{K}^p \\ x & \longmapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{cases}$$

est surjective.
Indication : Montrer d'abord le résultat pour $p = n$.

3.7.4 Projecteurs et symétries

Exercice 272. ⋆ (solution) Soit $E = \mathbb{K}_{2n}[X]$ et f l'application définie sur E par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = X^{2n} P(\frac{1}{X}).$$

Montrer que f est une symétrie, puis déterminer sa base et sa direction.

Exercice 273. (solution) Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ non constant. On considère f l'application qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par B. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur, puis déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 274. ⋆⋆ (solution) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ pour lequel il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = \mathrm{Id}_E$. Soit V un sous-espace vectoriel de E stable par u et p un projecteur de E sur V. On note

$$q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}.$$

Montrer que u et q commutent et que $\mathrm{Im}(q) \subset V$. En déduire que $p \circ q = q$, puis que q est un projecteur.

Chapitre 4

Probabilités, etc.

4.1 Dénombrement

Exercice 275. (solution) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > p^2$. Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'une des deux propositions suivantes est vrai

i. au moins $p+1$ des entiers $x_1, \ldots, x_n$ sont égaux,

ii. au moins $p+1$ des entiers $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Exercice 276. $\star$ (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\varphi(n) = \operatorname{Card}(\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\})$. Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\varphi(p^n)$.

Exercice 277. $\star\star$ (solution) Soit E un ensemble de cardinal n. Déterminer le cardinal de l'ensemble des couples de parties $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $X \cap Y$ est un singleton.

Exercice 278. $\star$ (solution) Si A est une partie de $\{1, \ldots, n\}$, on appelle diamètre de A la quantité

$$\operatorname{diam} A = \max A - \min A.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer le nombre de parties de $\{1, \ldots, n\}$ de diamètre égal à k.

Exercice 279. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$. Une partie de $[\![1, n]\!]$ est dite lacunaire si elle est non vide et ne contient pas deux entiers consécutifs. On note L_n le nombre de parties lacunaires de $[\![1, n]\!]$. Déterminer une relation de récurrence sur L_n.

Exercice 280. $\star\star$ (solution) Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$A_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in M_{2,n}(\mathbb{R}) \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1\}, \\ a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \equiv 1 \mod 2 \end{matrix} \right\}$$

Exercice 281. (solution) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

Indication : Considérer E un ensemble de cardinal n et dénombrer l'ensemble

$$F = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \cap B = \varnothing, |A \cup B| = p\}$$

de deux manières différentes.

Exercice 282. ⋆⋆ (solution) Soit E un ensemble fini de cardinal n. Montrer que le cardinal de $F = \{f : E \to E \mid f \circ f = f\}$ est

$$|F| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

Indication : Remarquer que $f \in F$ si et seulement si $\forall y \in f(E),\ f(y) = y$.

Exercice 283. ⋆⋆⋆ (solution) On note D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$, puis que que $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$. En déduire une expression de D_n.

Exercice 284. ⋆⋆ (solution) Notons $E = [\![1, n]\!]$. Calculer

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sum_{k \in X} k.$$

Indication : Remarquer que si $k \in X \in \mathcal{P}(E)$, alors $k = \mathbb{1}_X(k)k$.

4.2 Probabilités I

Exercice 285. (solution) Soit E un ensemble fini. Si l'on choisit aléatoirement deux parties A, B de E, déterminer la probabilité que A soit inclu dans B.

Exercice 286. ⋆ (solution) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si l'on tire aléatoirement une partie de $E = \{1, \ldots, n\}$, déterminer la probabilité qu'elle soit paire. En déduire la valeur de $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$.

Exercice 287. ⋆ (solution) On considère N urnes numérotées de 0 à N telles que l'urne k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, puis l'on effectue des tirages avec remise dans cette urne. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité que les n premières boules tirées soient blanches.

Exercice 288. ⋆ (solution) Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance une pièce, s'il obtient face il gagne. Sinon B lance la pièce, s'il obtient pile il gagne, sinon c'est à nouveau à A de lancer et ainsi de suite. On note A_k (resp. B_k) l'évènement

« Le joueur A (resp. B) gagne au k-ième lancer. »

Calculer les probabilités des évènements A_k et B_k. On suppose maintenant que le jeu s'arrête au bout de $2n$ lancés, calculer la probabilité que le joueur A gagne, que le joueur B gagne, que la personne ne gagne. Donner les limites lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 289. ⋆⋆⋆ (solution) On considère N urnes numérotées de 1 à N telles que l'urne k contient k boules blanches et $N + 1 - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, avec une probabilité proportionnelle à son numéro (à déterminer, donc), puis l'on effectue p tirages simultanés dans cette urne. Pour $p \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches (on note A cet évènement).

Exercice 290. ⋆ (solution) Soit A, B des évènements d'un univers Ω. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B)P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap \overline{B})P(\overline{A} \cap B).$$

4.2.1 Variables aléatoires

Exercice 291. (solution) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{1, \ldots, 2p\}$. Calculer la probabilité $P(X_1 + \cdots + X_n \equiv 0 \mod 2)$.

Exercice 292. ⋆ (solution) Un.e enfant possède deux paquets de n bonbons, un dans chaque poche. À chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit une poche au hasard et prend un bonbon du paquet correspondant. À un moment, il essayera de piocher dans un des paquets de bonbonds et réalisera qu'il est vide. On note X le nombre de bonbons restant dans l'autre paquet à ce moment-là. Déterminer la loi de X.

Exercice 293. ⋆⋆ (solution) On considère une urne contenant initialement une boule marquée et deux boules non marquées. On répète l'expérience suivante. On tire une boule dans l'urne, si elle est marquée on la remet dans l'urne, si elle est non marquée on la marque et on la remet dans l'une. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules marquées dans l'urne après la n-ième répétition de l'expérience. Déterminer la loi de Y_n.

Exercice 294. ⋆ (solution) Soit X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On note Y_1, Y_2, Y_3 les valeurs de X_1, X_2, X_3 réordonnées dans l'ordre croissant. En particulier, $Y_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ et $Y_3 = \max(X_1, X_2, X_3)$.

1) Déterminer les lois de Y_1 et Y_3.
2) On note $Z_k = \operatorname{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant 3 \mid X_i \leqslant k\})$. Déterminer la loi de Z_k, puis en en déduire la loi de Y_2. *Indication :* Comparer $(Z_k \geqslant 2)$ et $(Y_2 \leqslant k)$.

Exercice 295. (solution) On considère une variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont affichés sur un compteur qui est cassé : si X est non nul, il affiche la bonne valeur, alors que si X est nul, il affiche une valeur aléatoire entre 1 et n. En notant Y la variable aléatoire égale à la valeur affichée sur le compteur, calculer la loi de Y.

Exercice 296. ⋆ (solution) Oscar marche aléatoirement sur une rue infinie, dans laquelle sont disposés des lampadaires numérotés par $\mathbb{Z}$. Initialement, il se trouve au lampadaire numéroté 0 et fait des pas de 1 en avant ou en arrière. Sa position au temps n est modélisée par

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n,$$

où $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et on pose $S_0 = 0$. Déterminer $P(S_n = 0)$ la probabilité qu'Oscar soit revenu au lampadaire 0 au temps n.
On donne la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, déterminer un équivalent en $+\infty$ de $P(S_{2n} = 0)$.
Traiter maintenant le cas d'une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire que pour $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{e_1, -e_1, e_2, -e_2$ (où (e_1, e_2) est une base canonique de $\mathbb{R}^2$), étudier la loi $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et donner un équivalent de $P(S_{2n} = 0)$ en $+\infty$.

Exercice 297. ⋆⋆ (solution) Soit $n \geqslant 2$ un entier et $p \in]0, 1[$. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} X & X \\ Y & Y \end{pmatrix}$ soit une matrice de projection non-nulle ($i.e.$ $M^2 = M$).

Exercice 298. ⋆⋆⋆ (solution) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. On note $U = (X_1, \dots, X_n)$ et la matrice carrée $M = U^T U$. On pose $R = \operatorname{rg}(M)$ et $T = \operatorname{Tr}(M)$. Déterminer les lois de R et T, puis calculer la probabilité que M soit une matrice de projection non nulle.

Exercice 299. ⋆⋆⋆ (solution) Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ telles que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $P(Y = j) > 0$. On note $A = (P(X = i, Y = j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la matrice A est de rang 1.

Exercice 300. (solution) Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$, on pose son polynôme générateur (en la variable t)

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) t^k.$$

1) Montrer que si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs respectivement dans $\{0, \dots, n\}$ et $\{0, \dots, m\}$, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

2) Montrer qu'on ne peut pas piper deux dés pour que leur somme suive une loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.

Chapitre 5

Solutions

Solution 78. (énoncé) On effectue le changement de variable $u = \frac{x}{x+1}$, ce qui donne

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{x(x+1)}u\mathrm{d}x,$$

donc

$$\int \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \int \frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln^2 u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Solution 79. (énoncé) On remarque que $\frac{1}{cos^2 x}$ a pour primitive $\tan x$, et la dérivée de $\frac{1}{\cos^2 x}$ est $2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$, donc par intégration par parties,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\tan x \sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

On en déduit donc que

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x = \frac{\tan x}{3}(\frac{1}{\cos^2 x} + 2).$$

Solution 81. (énoncé) Par intégrations par parties, on a

$$\int \frac{\mathrm{Arctan}x}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{Arctan}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}.$$

Or, par décomposition en élément simples,

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}\right) = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}.$$

Donc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Solution 133. (énoncé) Soit f une telle fonction. En apliquant à nouveau f sur son équation fonctionnelle, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(ax+b) = f(f(f(x))) = af(x) + b.$$

En dérivant, on en déduit que $af'(ax+b) = af'(x)$. Puisque $a \neq 0$, on a $f'(ax+b) = f'(x)$. Pour montrer que f' est constante, il s'agit alors de montrer que si $x_0 \in \mathbb{R}$ et que l'on considère la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = ax_n + b$, alors elle converge vers une limite ℓ indépendant de x_0. EN effet, en itérant la relation trouvée sur f', on sait que $f'(x_0) = f'(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est une suite arithmético-géométrique, il existe plusieurs méthodes pour en montrer la convergence, l'argument essentiel est que l'on a $a \in]0,1[$. En décomposant la suite (x_n) comme la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière de sa relation (linéaire) de récurrence, on trouve que le terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \lambda a^n + \ell,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ dépendant de x_0 et $\ell = \frac{b}{1-a}$, si bien que l'on a bien $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par continuité de f', on déduit donc que $f'(x_0) = f'(\ell)$, ce qui montre bien que f' est constante, puisque x_0 était quelconque.
La fonction f est donc affine, disons $f(x) = mx + p$. En injectant ceci dans l'équation fonctionnelle, on obtient $m^2x + mp + p = ax + b$, donc $m = \pm\sqrt{a}$ et $p = \frac{b}{1+m}$.

Solution 134. (énoncé) En faisant un dessin, on voit que le graphe de g est la concaténation de deux copies contractées du graphe de f. La condition semble donc porter sur le raccordement de f en 1 et en 0.
Formellement, il est déjà clair que g est dérivable sur $[0,1] \setminus \frac{1}{2}$. Ensuite, pour que g soit dérivable en $\frac{1}{2}$, il faut au moins qu'elle y soit continue, ce qui se traduit par $f(1) = g(\frac{1}{2}) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} g(x) = f(0)$. Pour obtenir la dérivabilité, regardons les taux d'accroissements à gauche et à droite de g en $\frac{1}{2}$. À gauche, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}[$, on a

$$\frac{g(\frac{1}{2}) - g(x)}{\frac{1}{2} - x} = 2\frac{f(1) - f(2x)}{1 - 2x} \underset{x\to\frac{1}{2}^-}{\longrightarrow} 2f'(1),$$

puisque f est dérivable en 1. À droite, pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1]$, on a

$$\frac{g(\frac{1}{2}) - g(x)}{\frac{1}{2} - x} = 2\frac{f(0) - f(2x-1)}{0 - (2x-1)} \underset{x\to\frac{1}{2}^+}{\longrightarrow} 2f'(0).$$

Ainsi, g est dérivable en $\frac{1}{2}$ si et seulement si ses limites à gauche et à droite coïncident, *i.e.* si et seulement si $f(0) = f(1)$ et $f'(0) = f'(1)$.

Solution 135. (énoncé) La fonction f est bijective car continue et strictement croissante. Ensuite, on calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^x + 1 > 0,$$

donc puisque f' ne s'annule pas, f^{-1} est elle aussi dérivable, de dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

De cette expression, on déduit que $(f^{-1})'$ est elle aussi dérivable, de dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})''(x) = -\frac{(f^{-1})'(x)f'' \circ f^{-1}(x)}{(f' \circ f^{-1}(x))^2} = -(f^{-1})'(x)^3 f'' \circ f^{-1}(x)$$

Maintenant, on remarque que $f(0) = e^0 + 0 = 1$, donc $f^{-1}(1) = 0$. On a $f'(0) = 2$, donc $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$ et $(f^{-1})''(1) = \frac{1}{8}f''(0) = \frac{1}{8}$.

Solution 136. (énoncé) Puisque f est continue sur le segment $[0,1]$, d'après le théorème des bornes atteintes, elle y atteint son maximum, disons en $a \in [0,1]$. Si $a \in \{0,1\}$, alors $f(a) = 0$ et donc f est à valeurs négatives. Sinon, a est un point intérieur de $[0,1]$ et donc $f''(a) \leqslant 0$ puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$. Dès lors, $f(a) < 0$ et f est à valeurs négatives.

Solution 137. (énoncé) Supposons par l'absurde que l'équation $P(x) = e^x$ admet un nombre infini de solutions sur $\mathbb{R}$. Alors considérant $f : x \mapsto P(x) - e^x$, en appliquant Rolle itéré, on obtient que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois, alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = -e^x < 0$, contradiction.

Solution 138. (énoncé) Il faut utiliser une fonction auxiliaire et lui appliquer Rolle. Le fait que $f(1) = e$ (et $f(0) = e^0$) doit nous faire penser à considérer $g : x \mapsto f(x)e^{-x}$, de sorte que $g(0) = g(1)$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$, tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x},$$

et on conclut puisque $e^{-c} \neq 0$.

Solution 139. (énoncé) Remarquons tout d'abord que si $a = b$, alors on est ramené à montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(1-c)f(c) - f(1-c)f'(c) = 0,$$

et on pense donc à considérer la fonction $x \mapsto f(1-x)f(x)$. Ceci nous donne l'idée, pour $a, b > 0$ quelconques de considérer $g : x \mapsto f(1-x)^b f(x)^a$, de dérivée

$$\forall x \in [0, 1], \quad g'(x) = -bf'(1-x)f(1-x)^{b-1}f(x)^a + af(1-x)^b f'(x)f(x)^{a-1}.$$

D'autre part, g est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et $g(0) = g(1)$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c)$, *i.e.*

$$bf'(1-c)f(1-c)^{b-1}f(c)^a = af(1-c)^b f'(c)f(c)^{a-1}$$

En divisant à gauche et à droite par $f(c)^a f(1-c)^b$, on déduit bien le résultat attendu. À noter que l'on a utilisé plusieurs fois sans le dire l'hypothèse $f > 0$, notamment pour dériver et ré-organiser l'équation.

Solution 146. (énoncé) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, on vérifie par croissance et convexité de l'exponentielle que

$$\begin{aligned} f^\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) = e^{\alpha \ln \circ f(\lambda x + (1-\lambda)y)} &\leqslant e^{\lambda\alpha \ln \circ f(x) + (1-\lambda)\alpha \ln \circ f(y))} \\ &\leqslant \lambda e^{\alpha \ln \circ f(x)} + (1-\lambda)e^{\alpha \ln \circ f(y)} = \lambda f^\alpha(x) + (1-\lambda)f^\alpha(y). \end{aligned}$$

Solution 147. (énoncé) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Il faut penser au changement de variable $t = s + \lambda x + (1-\lambda)y$ dans l'intégrale qui définit g,

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_{\lambda x + (1-\lambda)y - 1}^{\lambda x + (1-\lambda)y + 1} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} f(s + \lambda x + (1-\lambda)y)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

En remarquant que l'on peut écrire $s = \lambda s + (1-\lambda)s$, on peut utiliser la convexité de f, puis refaire le changement de variable dans le sens opposé,

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leqslant \lambda \int_{-1}^{1} f(s+x)\mathrm{d}s + (1-\lambda)\int_{-1}^{1} f(s+x)\mathrm{d}s \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y). \end{aligned}$$

Solution 148. (énoncé) Par continuité et bijectivité de f, sa réciproque est strictement monotone. Si f^{-1} est strictement croissante, alors en composant l'inégalité de convexité de f, on déduit que f^{-1} est concave. En effet, si $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x)$$

et donc en composant à gauche par f^{-1},

$$\lambda x + (1-\lambda)y \leqslant f^{-1}(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(x)),$$

et on conclut en appliquant cette inégalité plutôt à $f^{-1}(x)$ et $f^{-1}(y)$ au lieu de x et y. En revanche, si f^{-1} est strictement décroissante, on en déduit qu'elle est convexe.

Solution 149. (énoncé) En faisant un dessin, on se convainc rapidement que seules les fonctions linéaires conviennent. Pour le montrer, remarquons que si f impaire et convexe, alors pour $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$f((2\lambda-1)x) = f(\lambda x + (1-\lambda)(-x)) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(-x) = (2\lambda - 1) f(x).$$

Autrement dit (en posant $\mu = 2\lambda - 1$), si $\mu \in [-1,1]$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $f(\mu x) \leqslant \mu f(x)$. Or, par imparité, pour tout $\mu \in [-1,1]$ et $x \in \mathbb{R}$, en appliquant l'inégalité précédente à $-x$, on établit que

$$f(\mu x) = -f(-\mu x) \geqslant -\mu f(-x) = \mu f(x),$$

si bien que $f(\mu x) = \mu f(x)$, et de là on déduit que f est linéaire puisque pour $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(\frac{1}{\lambda}(\lambda x)) = \frac{1}{\lambda} f(\lambda) x,$$

i.e. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Solution 150. (énoncé) Pour s'inspirer, on peut faire un dessin et se souvenir de comment exprimer l'aire d'un trapèze ayant deux angles droits.
Pour l'inégalité de gauche, utilisons le fait qu'une fonction convexe est minorée par ses tangentes. Dès lors,

$$\forall x \in [a,b], f(x) \geqslant \quad f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(x - \frac{a+b}{2}) + f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

donc par croissance de l'intégrale, puis en appliquant le changement de variable $y = x - \frac{a+b}{2}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(x - \frac{a+b}{2}) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} y \,\mathrm{d}y = f\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

On peut calculer directement l'intégrale, mais le changement de variable permet d'intégrer une fonction impaire (d'intégrale nulle sur un tel intervalle), c'est plus habile.
Pour la seconde intégrale, on compare f à un de ses cordes,

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

À nouveau, en intégrant cette inégalité, puis en effectuant le même changement de variable que précédemment,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x + (b-a)f(a) \\ &= (b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} (y + \frac{a+b}{2} - a)\mathrm{d}y \\ &= (b-a)f(a) + (f(b)-f(a))(\frac{a+b}{2} - a) = (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{2}.\end{aligned}$$

Encore, le changement de variable sert uniquement à s'éviter un calcul. En général, quand on intègre une fonction affine (ou même polynomiale), il vaut toujours mieux essayer de se ramener à un intégrale symétrique, tout ira mieux.

Solution 151. (énoncé) Il s'agit simplement d'utiliser la convexité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$ avec le coefficient $\lambda = \frac{1}{2}$.

Solution 152. (énoncé) On a un produit, donc on passe au logarithme. Ainsi, ceci revient à montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant n \ln\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

On remarque qu'en multipliant par $\frac{1}{n}$, on fait apparaître à gauche, donc en appliquant Jensen au logarithme (qui est concave), on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Solution 153. (énoncé) On a un produit, donc on passe au logarithme. Il s'agit d'abord de vérifier qu'on peut le faire. Par multiplication matricielle, on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$y_i = \sum_{j=1} a_{ij} x_j > 0,$$

car les a_{ij}, $j = 1, \ldots, n$ ne sont pas tous nuls (leur somme est égale à 1) et les x_j sont strictement positifs. Ainsi, on est bien ramenés à montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) \geqslant \sum_{i=1} \ln(x_i).$$

Or, par concavité du logarithme,

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ln x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Solution 216. (énoncé) Le polynôme $R\left(\frac{X^2}{1+X^2}\right)$ est non constant, car $\frac{X^2}{1+X^2}$ prend une infinité de valeurs et R est non constant. Donc puisque c'ets un polynôme, on a

$$\lim_{x\to+\infty} R\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \pm\infty = \lim_{x\to 1^-} R(x).$$

Ceci montre bien que 1 est un pôle de R.

Solution 217. (énoncé) La linéarité repose essentiellement sur l'unicité de la division euclidienne. Le noyau est $\operatorname{Ker} f = B\mathbb{K}[X]$, par le lemme de Gauss. L'image est $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, l'inclusion réciproque se montre en utilisant une relation de Bézout enter A et B.

Solution 218. (énoncé) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un tel polynôme. Par hypothèse, il existe un réel λ tel que pour tout $k = 2, 3, 4$, on a $P(k) = \lambda$. Par conséquent, le polynôme $P(X) - \lambda$ a pour racines 2, 3 et 4 et puisqu'il est unitaire de degré 3, on en déduit que

$$P(X) = \lambda + (X-2)(X-3)(X-4).$$

Or, $P(1) = 0$ par hypothèse, donc $\lambda = -(1-2)(1-3)(1-4) = 6$.
Réciproquement, le polynôme $6 + (X-2)(X-3)(X-4)$ vérifie bien les hypothèses.

Solution 219. (énoncé) D'après la décomposition en éléments simples,

$$\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}[X] \oplus \operatorname{Vect}\left(\left\{\frac{1}{(X-z)^n} \middle| z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*\right\}\right).$$

En général,

$$\mathbb{K}(X) = \mathbb{K}[X] \oplus \operatorname{Vect}\left(\left\{\frac{Q(X)}{P(X)^n} \middle| P \in \mathbb{K}[X] \text{ irréductible sur } \mathbb{K}, \deg Q(X) < \deg P(X), n \in \mathbb{N}^*\right\}\right).$$

Solution 220. (énoncé) La décomposition en éléments simples est

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(X-2)^2} + \frac{-\frac{3}{4}}{X-2}.$$

En multipliant par $X(X-1)(X-2)^2$, on obtient

$$1 = -\frac{1}{4}P + Q + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(X-2)\right)R,$$

donc $U = -\frac{1}{4}$, $V = 1$ et $W = -\frac{3}{4}X + 2$ conviennent.

Solution 221. (énoncé) Notons $Q(X) = (X-1)(X^n-1)$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On a la décomposition en éléments simples

$$F(X) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{X-\omega^k} + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2}.$$

Tout d'abord, pour les pôles simples,

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n-1, \quad a_k = \frac{1}{Q'(a_k)} = \frac{1}{(\omega^k-1)n\omega^{-k}} = \frac{\omega^k}{n(\omega^k-1)}.$$

On pose

$$G(X) = (X-1)^2F(X) = \frac{X-1}{X^n-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} X^k} = a(X-1) + b + (X-1)^2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-\omega^k}.$$

Donc $b = G(1) = \frac{1}{n}$ et $a = G'(1)$. Or,

$$G'(X) = -\frac{\sum_{k=1}^{n-1} kX^{k-1}}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2},$$

donc $a = G'(1) = -\frac{n(n-1)}{2n^2} = -\frac{n-1}{2n}$.

Solution 222. (énoncé) On va chercher à écrire $R(X)$ sous la forme $P(X)/Q(X)$, avec $Q(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-\omega_k) = X^n - 1$ et $\deg P \leqslant n-1$, car on dispose d'une décomposition en éléments simples. On remarque que

$$Q'(X) = nX^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(X-\omega_k),$$

donc $Q'(\omega_k) = n\omega_k^{n-1} = n\omega_k^{-1} = \prod_{j\neq k}(\omega_k - \omega_j)$. Donc en évaluant $(X-\omega_k)R(X)$ en ω_k, on obtient

$$\frac{\omega_k^2}{n} = \frac{P(\omega_k)}{\prod_{j\neq k}(\omega_k-\omega_j)} = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \frac{1}{n}\omega_k P(\omega_k).$$

On en déduit que $P(\omega_k) = \omega_k$ et donc $P(X) = X$, car $\deg P \leqslant n-1$.

Solution 223. (énoncé) On considère la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(X)}$,

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-x_k}.$$

On a

$$a_k = \lim_{x\to x_k} \frac{x-x_k}{P(x)} = \lim_{x\to x_k} \frac{x-x_k}{P(x)-P(x_k)} = \frac{1}{P'(x_k)},$$

d'où

$$\frac{1}{P(X)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-x_k)P'(x_k)}.$$

En évaluant en 0, puisque 0 n'est pas une racine de P, on obtient

$$\frac{1}{P(0)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}.$$

D'autre part, en regardant les fonctions rationnelles associées, en multipliant par x en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x-x_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}.$$

Solution 254. (énoncé) La linéarité repose essentiellement sur l'unicité de la division euclidienne. Le noyau est $\operatorname{Ker} f = B\mathbb{K}[X]$, par le lemme de Gauss. L'image est $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}_{n-1}[X]$, l'inclusion réciproque se montre en utilisant une relation de Bézout enter A et B.

Solution 255. (énoncé) L'image de $(1, X, \dots, X^n)$ par f est échelonnée en degré, ce qui montre la surjectivité et donc la bijectivité, f étant un endomorphisme. Ensuite, on remarque que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P^{(n+1)}$ est nul et donc

$$P = P - P^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}(P^{(k)} - P^{(k+1)}) = \sum_{k=0}^{n} f(P^{(k)}) = f(\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}).$$

Solution 256. (énoncé) On trouve tout d'abord pour $p \geqslant 2$, $f(X^p) = (X+1)^p - (X-1)^p - 2X^p = X^{p-2} + \cdot$ et $f(1) = 0 = f(X)$. Ceci nous donne directement $\operatorname{Ker} f = \mathbb{K}_1[X]$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}_{n-2}[X]$ par le théorème du rang et des arguments de dimensions. Enfin, un supplémentaire de $\mathbb{K}_1[X]$ dans E est $X^2\mathbb{K}_{n-2}[X]$, ce qui permet de conclure à la dernière affirmation.

Solution 257. (énoncé) L'application proposée en indication est clairement linéaire, car l'évaluation de fonctions l'est. Elle est surjective sur $\mathbb{R}^{n+1}$, il est facile d'exhiber une fonction de F d'image n'importe quel $n+1$-uplet de réel. Elle est en outre injective, puisque qu'une fonction de F qui serait nulle en chacun des x_i est nécessairement nulle. Donc $\dim F = n + 1$.

Solution 258. (énoncé) Si $\dim(E) \leqslant 2$, tous les endomorphismes fonctionnent. Supposons donc $\dim E > 2$ et considérons un tel endomorphisme f.
Soit $x \in E$ tel que (u, x) est libre. Par hypothèse, il existe donc d'uniques scalaires $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(x) = \alpha_x u + \beta_x x.$$

Ainsi, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x) = \alpha_{\lambda x} u + \beta_{\lambda x} \lambda x = \lambda f(x) = \lambda \alpha_x u + \beta_x \lambda x,$$

donc par unicité, $\alpha_{\lambda x} = \lambda \alpha_x$ et $\beta_{\lambda x} = \beta_x$. Maintenant, si $x, y \in E$ et (x, y, u) est libre, on trouve de même $\alpha_{x+y} = \alpha_x + \alpha_y$ et $\beta_{x+y} = \beta_x = \beta_y$. On notera donc dorénavant $\beta = \beta_x$.
Enfin, si (u, x) est libre, alors $(u, u + x)$ est également libre, donc

$$f(x+u) = \alpha_{x+u} u + \beta(x+u) = \alpha_x u + \beta x + f(u).$$

Finalement, ceci montre que $(f(u), u)$ est liée, ce qui permet de conclure que f est de la forme

$$\forall x \in E,\ f(x) = \alpha(x) u + \beta u,$$

avec $\alpha \in E^*$ et $\beta \in \mathbb{K}$ et réciproquement, une telle application convient.

Solution 259. (énoncé) Si f admet un point fixe non-nul, alors f ne peut être nioptent. Donc $\mathrm{Id}_E - f$ est injectif et donc bijectif. Pour trouver sa réciproque, on s'inspire heuristiquement de l'expression $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^k + \cdots$ et puisque f est nilpotent d'indice au plus $n = \dim E$, on vérifie que $\mathrm{Id}_E + f + \cdots + f^n$ est bien la réciproque cherchée.

Solution 260. (énoncé) Il est clair que $f(G_1 \oplus G_2) = f(G_1) + f(G_2)$ par linéarité. Par injectivité, on vérifie que $f(G_1) \cap f(G_2) = \{0\}$, ce qui montre que la somme des images est directe.
Sans injectivité, la projection sur G_1 parallèlement à G_2 avec $E = F$ donne par exemple un contre-exemple.

Solution 261. (énoncé) On a $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \geqslant \operatorname{rg}(g+f)$, donc puisque $f+g$ est surjectif, $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \geqslant n$. Ensuite, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ et donc par le théorème du rang appliqué à g,

$$\operatorname{rg} g + \operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg} g + \dim \operatorname{Ker} g = n.$$

Solution 262. (énoncé) Considérons $P \in \mathbb{K}[X]$ un tel polynôme, que l'on écrit donc $P = XQ$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. D'après le théorème du rang, il nous suffit de montrer que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Soit donc x un vecteur de cette intersection. Puisque $x \in \operatorname{Im} f$, on a $Q(f)(x) = 0$. En outre, comme $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $Q(f)(x) = \lambda x$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ est le coefficient constant (non-nul) de Q. De ceci on déduit que $x = 0$.

Solution 263. (énoncé) Soit $1 \leqslant i \leqslant k$. D'après le théorème du rang appliqué à f_i, on sait que $\dim E_i = \operatorname{rg} f_i + \dim \operatorname{Ker} f_i = \operatorname{rg} f_i + \operatorname{rg} f_{i-1}$. Donc, puisque $\operatorname{rg} f_0 = 0 = \operatorname{rg} f_k$,

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim E_i = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i (\operatorname{rg} f_i + \operatorname{rg} f_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} \left((-1)^i \operatorname{rg} f_i - (-1)^{i-1} \operatorname{rg}(f_{i-1})\right) = (-1)^k \operatorname{rg} f_k = 0.$$

Solution 264. (énoncé) Si $f, g \in G$, alors f et g induisent des automorphismes de I. De cela on déduit que $I \cup \operatorname{Im}(g \circ f)$. De plus, il est clair que que $K \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et par égalité dimensions et le théorème du rang, on déduit que $g \circ f \in G$. Donc $(G, \circ)$ est un magma associatif.
L'élément neutre de G est l'application nulle sur K et égale à l'identité sur I. L'inverse de $f \in G$ est l'application nulle sur K et égale à $(f_{|I})^{-1}$ sur I.

Solution 265. (énoncé) Commençons par supposer le terme de droite de l'équivalence. De l'égalité $f^2 = 0$, on déduit $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Maintenant, si $x \in \operatorname{Ker} f$,

$$x = f \circ g(x) + g \circ f(x) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f,$$

d'où l'égalité $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
Maintenant, supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Il est clair que $f^2 = 0$. Considérons F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, de sorte que f induit un isomorphisme de F dans $\operatorname{Im} f$. Soit alors $g \in \mathscr{L}(E)$ l'endomorphisme défini par $g_{|\operatorname{Im} f} = (f_{|F})^{-1}$ et $g_{|F} = f_{|F}$, par exemple. Pour $x = y + z \in F \oplus \operatorname{Im} f = E$, on vérifie bien

$$\begin{aligned} f \circ g(x) + g \circ f(x) &= f \circ g(y) + g \circ f(y) + f \circ g(z) + g \circ f(z) \\ &= f^2(y) + y + z + g(0) = x. \end{aligned}$$

Solution 266. (énoncé)

1) L'affirmation de l'indication se vérfie directement puisque $G \subset F \oplus S$. Considérons donc l'application qui à $x \in G$ associe $f(x)$ l'unique vetceur de F tel que $x + f(x) \in S$. Par l'unicité du vecteur $f(x)$, on vérifie la linéarité de $f : G \to F$. Par construction, on a $V_f \subset S$. En outre, $S \subset F \oplus G$, donc il est clair que $S \subset V_f$.

2) Il suffit de montrer que tout supplémentaire de F est isomorphe à $G = V_0$. Soit donc $f \in \mathscr{L}(G, F)$, et
$$\varphi : \begin{cases} G & \longrightarrow V_f \\ x & \longmapsto x + f(x) \end{cases}.$$
L'application φ est linéaire car f l'est. Elle est injective, puisque si $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, on a $x = 0$, F et G étant en somme directe (et $f(x) \in F$). Elle est également surjective par définition de V_f.

Solution 267. (énoncé)

1) Astro-classique. Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in E$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Si $x, y \in E$ sont deux vecteurs indépendants, alors
$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y,$$
donc par liberté de (x, y), on a $\lambda_{x+y} = \lambda_y = \lambda_x$. Maintenant, si $\mu \in E$, alors
$$f(\mu x) = \lambda_{\mu x}\mu x = \mu f(x) = \lambda_x \mu x,$$
d'où $\lambda_{\mu x} = \lambda_x$. Donc f est bien une homothétie, puisque λ_x ne dépend pas de x.
2) On procède par récurrence sur k. L'initialisation est faite en question 1), donc donnons-nous $2 \leqslant k \leqslant n-1$ et supposons avoir montré que si f stabilise les sous-espaces de dimension $k-1$, alors f est une homothétie.
Soit F un espace de dimension $k-1 \leqslant n-2$ et soit G un supplémentaire de F. On a $\dim G \geqslant 2$, donc on peut se donner deux vecteurs indépendants $e_1, e_2 \in G$. Alors $F_1 = F \oplus \mathbb{K}e_1$ et $F_2 = F \oplus \mathbb{K}e_2$ sont de dimension k et sont donc stabilisés par f. On en déduit donc que f stabilise $F_1 \cap F_2 = F$, ce qui permet de conclure que f est une homothétie.

Solution 268. (énoncé) Notons $F_k = \operatorname{Im}(f_{k+1} \circ \cdots \circ f_n)$. Puisque f_k commute avec $f_{k+1}, \dots, f_n$, il stabilise bien F_k. Ainsi, $f_{k|F_k}$ est un endomorphisme nilpotent de F_k. En particulier, si $F_k \neq 0$, cet endomorphisme n'est pas bijectif et donc $\dim(F_{k+1}) = \dim(\operatorname{Im} f_{k|F_k}) < \dim(F_k)$. Si pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, l'un des F_k est nul, c'ets direct, sinon on conclut par récurrence que $\dim F_n = 0$ et donc $f_1 \circ \cdots \circ f_n = 0$.

Solution 269. (énoncé) Une forme linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$. Or, le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan, donc une forme linéaire est injective si et seulement si E est de dimension 1 (et donc un hyperplan de dimension nulle).

Solution 270. (énoncé) On suppose avoir une combinaison linéaire de la famille $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ égale à 0 et en évaluant cette combinaison linéaire en les polynômes de Lagrange associés aux $a_0, \dots, a_n$, on conclut que la famille est libre. On en déduit que c'est une base par un argument de dimension.

Solution 271. (énoncé) Remarquons tout d'abord que $\operatorname{Ker} f = \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}\varphi_k$.
Supposons tout d'abord que la famille est libre. Alors on peut en la compléter en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E^*. Dès lors, on considère $g \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}^n)$ l'application construite de la même manière que f mais cette fois-ci à partir de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Il est alors clair que si g est surjective, alors f l'est. Par égalités de dimensions, on est ramenés à montrer que g est injective. Supposons par l'absurde que g est non injective. Alors il existe un vecteur $x \in \operatorname{Ker} g = \bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker}\varphi_k$ non nul. Or puisque tout forme linéaire est combinaison linéaires des $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, il en résulte que toute forme linéaire s'annule en x, ce qui est impossible (il est facile de construire un contre exemple). Par conséquent, g est injective et donc f est surjective.
Réciproquement, supposons f surjective. Alors si pour $1 \leqslant k \leqslant n$ on note e_k le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Par hypothèse, il existe un vecteur $_k \in E$ tel que $f(x_k) = e_k$. Il est alors aisé de montrer que la famille des $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre, en évaluant les combinaison linéaires en chaque x_k.

Solution 272. (énoncé) Tour d'abord, on voit que si $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \in E$, alors
$$f(P) = X^{2n} \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{-k} = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n_k} X^k \in E$$

et il est clair que f est linéaire. C'est donc un endomorphisme. En outre, on constate que pour tout $P \in E$, on a

$$f^2(P) = f(X^{2n}P(\frac{1}{X})) = X^{2n} \cdot \frac{1}{X^{2n}}P(X) = P,$$

donc f est bel et bien une symétrie. Cherchons les éléments $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. En passant par les coefficients, on a (on conclut par identification des coefficients)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) &= \left\{ \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \in E \,\middle|\, \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k \in E \,\middle|\, \sum_{k=0}^{2n} (a_k - a_{2n-k}) X^k = 0 \right\} = \mathrm{Vect}(\{X^k + X^{2n-k} | 0 \leqslant k < n\} \cup \{X^n\}).\end{aligned}$$

De la même manière,

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\{X^k - X^{2n-k} | 0 \leqslant k < n\}).$$

Solution 273. (énoncé) La linéarité repose essentiellement sur l'unicité de la division euclidienne. Il est clair que $f^2 = f$. Le noyau est $\mathrm{Ker}\, f = B\mathbb{K}[X]$. L'image est $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Solution 274. (énoncé) En utilisant le fait que $u^n = \mathrm{Id}_E$, on calcule tout d'abord

$$\begin{aligned} q \circ u &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n+1-k} \\ &= \frac{1}{n} u \circ p \circ u^n + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} u^k \circ p \circ u^{n+1-k} \\ &= \frac{1}{n} u^{n+1} \circ p \circ u^n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k} = u \circ q. \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $V = \mathrm{Im}(p)$, et que V est stabilisé par u, il est clair que $\mathrm{Im}(q) \subset V$. Alors, puisque u et q commutent, pour tout $1 \leqslant kn$,

$$\begin{aligned} u^k \circ p \circ u^{n-k} \circ q &= u^k \circ p \circ q \circ u^{n-k} \\ &= u^k \circ q \circ u^{n-k} = q \circ u^n = q. \end{aligned}$$

En sommant, il est ainsi clair que $q \circ q = q$.

Solution 275. (énoncé) Supposons que le cardinal de $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est $\leqslant p$. On va généraliser le principe des tiroirs. Pour toute valeur $k \in A$, notons

$$I_k = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i = k.$$

Alors si pour tout $k \in A$, on suppose que $|I_k| \leqslant p$, alors

$$p^2 < n = \sum_{k \in A} |I_k| \leqslant p|A| = p^2,$$

ce qui est absurde.

Solution 276. (énoncé) On a

$$\begin{aligned} \{k \in [\![1, p^n]\!] \mid k \wedge p^n \neq 1\} &= \{k \in [\![1, p^n]\!] \mid p | k\} \\ &= \{pl \in [\![1, p^n]\!] \mid l \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Or, si $s \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant pl \leqslant p^n$ si et seulement si $1 \leqslant l \leqslant p^{n-1}$. On en déduit donc que

$$\varphi(n) = p^n - \mathrm{Card}(\{k \in [\![1, p^n]\!] \mid k \wedge p^n \neq 1\}) = p^n - p^{n-1} = (p-1)p^{n-1}.$$

Solution 277. (énoncé) Il y a en tout $n3^{n-1}$ tels couples. Pour le voir, il faut d'abord choisir l'élément $e \in E$ qui sera dans l'intersection de X et Y (n possibilités), puis choisir pour chaque élément de $E \setminus \{e\}$ si ce sera un élément de $X \setminus \{e\}$, de $Y \setminus \{e\}$ ou de $E \setminus (X \cup Y)$, puisque

$$E = (X \setminus \{e\}) \sqcup (Y \setminus \{e\}) \sqcup (E \setminus (X \cup Y)).$$

Solution 278. (énoncé) Tout d'abord, si $k \geqslant n$, il n'y a pas de partie de diamètre égal à k. Ensuite, si $k = 0$, alignlors toute partie de diamètre 0 est un singleton, il y en a exactement n.
Supposons donc $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Pour construire une partie A de diamètre k, il faut d'abord choisir son minimum. On doit avoir $\max A = k + \min A$ et donc $\min A + k \leqslant n$. On a donc $n - k$ choix pour $\min A$, ce qui fixe $\max A$. Alors, $A \setminus \{\min A, \max A\}$ est une partie de $\{\min A + 1, \dots, \max A - 1\}$, qui a $k - 1$ éléments, ce qui laisse donc 2^{k-1} choix.
Finalement, on a $(n-k)2^{k-1}$ parties de diamètre k fixé dans $\{1, \dots, n-1\}$.

Solution 279. (énoncé) Soit $X \subset [\![1, n+2]\!]$ lacunaire.

- Si X contient $n+2$, alors $Y = X \setminus \{n+2\}$ est une partie lacunaire de $[\![1, n]\!]$ ou est vide, ce qui donne $L_n + 1$ parties.
- Si X ne contient pas $n+2$, alors X est une partie lacunaire de $[\![1, n+1]\!]$, ce qui donne L_{n+1} parties.

On conclut que $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n + 1$. On peut aller plus loin en remarquant que si $u_n = L_n + 1$, alors $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Or, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, donc si l'on note $(F_n)_n$ la suite de Fibonacci, on a $u_n = F_{n+2}$ et donc

$$L_n = F_n + 2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] - 1.$$

Solution 280. (énoncé) Notons B_n le pendant de A_n avec cette fois la condition $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \equiv 0 \mod 2$. Ainsi, on a $|A_n| + |B_n| = 2^{2n}$. On va chercher une relation de récurrence. On remarque d'une part que si

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in A_n,$$

alors pour $a_{n+1}, b_{n+1} \in \{0, 1\}$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{n+1} \\ b_1 & \cdots & b_{n+1} \end{pmatrix} \in A_{n+1}$$

si et seulement si $a_{n+1} = 0$ ou $b_{n+1} = 0$, ce qui laisse donc 3 choix pour le couple (a_{n+1}, b_{n+1}) (il faut exclure $(1, 1)$). D'autre part, si

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in B_n,$$

alors pour $a_{n+1}, b_{n+1} \in \{0, 1\}$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{n+1} \\ b_1 & \cdots & b_{n+1} \end{pmatrix} \in A_{n+1}$$

si et seulement si $a_{n+1} = 1$ et $b_{n+1} = 1$, ce qui laisse donc un seul choix pour le couple (a_{n+1}, b_{n+1}). On en déduit donc que

$$|A_{n+1}| = 3|A_n| + |B_n| = (3-1)|A_n| + 2^{2n} = 2|A_n| + 4^n.$$

De même, on obtient $|B_{n+1}| = |A_n| + 3|B_n| = 2|B_n| + 4^n$ et par conséquent,

$$|B_{n+1}| - |A_{n+1}| = 2(|B_n| - |A_n|).$$

De ceci, on déduit que $|B_n| - |A_n| = 2^n$, puisque $|B_1| - |A_1| = 2$. Dès lors, en se rappelant que $|B_n| + |A_n| = 4^n$, on conclut que $|A_n| = \frac{1}{2}(4^n - 2^n) = 2^{n-1}(2^n - 1)$.
En fait, une fois que l'on a obtenu, on se doute qu'il existe une manière plus directe de dénombrer la situation. Elle est cependant assez astucieuse. Pour cela, il faut d'abord remarquer que l'on a exactement $2^n - 1$ choix pour le n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ puisque seul le n-uplet nulle est impossible. Ensuite, il y a autant de valeurs du n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ telles que la somme $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. En effet, il y a une bijection entre les n-uplets donnant une somme paire et ceux donnant une somme impaire. Pour le voir, on fixe un indice i tel que $a_i = 1$. Alors on considère l'application qui à n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ donnant une somme impaire associe le même n-uplet, ou seule la valeur de b_i est changée, qui est bien bijective. Ceci permet de conclure que pour un n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ fixé, on a exactement $2^n/2 = 2^{n-1}$ choix pour le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$. On a bien la formule attendue.

Solution 281. (énoncé) Suivant l'indication, dénombrons F de deux manières différentes. C'est l'occasion de le faire de manière vraiment formelle.
Tout d'abord,

$$\begin{aligned} F &= \bigsqcup_{k=0}^{p} \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}(E), |A|=k} \{(A,B) \in P(E)^2 \mid A \cap B = \varnothing, |A \cup B| = p\} \\ &= \bigsqcup_{k=0}^{p} \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}(E), |A|=k} \bigsqcup_{B \in \mathcal{P}(E \setminus A), |B|=p-k} \{(A,B)\}, \end{aligned}$$

et donc

$$|F| = \sum_{k=0}^{p} \sum_{A \in \mathcal{P}(E), |A|=k} \sum_{B \in \mathcal{P}(E \setminus A), |B|=p-k} 1 = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} F &= \bigsqcup_{C \in \mathcal{P}(E), |C|=p} \{(A,B) \in P(E)^2 \mid A \cap B = \varnothing, A \cup B = C\} \\ &= \bigsqcup_{C \in \mathcal{P}(E), |C|=p} \{(A, C \setminus A) \in P(E)^2 \mid A \in \mathcal{P}(C)\}, \end{aligned}$$

et donc

$$|F| = \sum_{C \in \mathcal{P}(E), |C|=p} |\mathcal{P}(C)| = 2^p \binom{n}{p}.$$

Solution 282. (énoncé) On écrit

$$F = \bigsqcup_{k=0}^{n} \bigsqcup_{X \subset E, |X|=k} \{f \in F \mid f(E) = X\}.$$

Or, en suivant l'indication, on sait que pour $X \subset E$,

$$\#\{f \in F \mid f(E) = X\} = |X|^{|E \setminus X|}$$

et donc

$$|F| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \subset E, |X|=k} k^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

Solution 283. (énoncé) Notons $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$. Soit $\sigma \in \mathfrak{D}_{n+1}$, on va regarder comment σ agit sur $n+1$. Tout d'abord, notons $k = \sigma(n+1) \in [\![1, n]\!]$.

— Si $\sigma(k) = n+1$, *i.e.* $\sigma^2(n+1) = n+1$, alors σ restreinte à $[\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ est un dérangement de $[\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ (qui est un ensemble à $n-1$ éléments).

— Sinon, on remarque que $(n+1\ k)\sigma \in \mathfrak{D}_n$.

Puisque l'on a initialement distingué les cas selon $1 \leqslant k \leqslant n$, on déduit donc bien que $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$. On vérifie ensuite que $D_2 = 2 \cdot D_1 + (-1)^2$, car $D_1 = 0$ et $D_2 = 1$, puis par récurrence si $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, alors

$$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1}) = nD_n + D_n - (-1)^n = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}.$$

Finalement, en utilisant cette formule, on montre par récurrence que

$$D_n = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Solution 284. (énoncé) La remarque nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \sum_{k\in X} k &= \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \sum_{k\in X} \mathbb{1}_X(k)k \\ &= \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \sum_{k\in E} \mathbb{1}_X(k)k = \sum_{k\in E} k \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \mathbb{1}_X(k).\end{aligned}$$

Or, si $k \in E$, il y a 2^{n-1} parties de E contenant k (la moitié), donc

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \sum_{k\in X} k = 2^{n-1} \sum_{k\in E} k = 2^{n-2} n(n+1).$$

Solution 285. (énoncé) On est ramené à un exercice de dénombrement. Il s'agit de calculer le cardinal de

$$\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \subseteq B\}.$$

En notant n le cardinal de E, on a $\binom{n}{k}$ choix pour A, puis, puisque $A \subset B$, il faut décider pour chaque élément de $E \setminus A$ s'il appartient à B, ce qui laisse 2^{n-k} choix. La probabilité finale vaut donc par la formule du binôme,

$$\frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Solution 286. (énoncé) On pourrait faire du dénombrement pur et dur mais on va essayer d'utiliser le langage probabiliste à fond les ballons.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit X_n une variable alétoire de loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$, notons $p_n = P(|X_n| \equiv 0 \mod 2)$ (la probabilité que X_n soit de cardinal pair). Notons $Y_n = X_n \cap \{n\}$, de sorte que

$$\Omega = (Y_n = \varnothing) \sqcup (Y_n = \{n-1\}) \sqcup (Y_n = \{n\}) \sqcup (Y_n = \{n-1, n\}).$$

Par la formule des probabilités totales, on en déduit

$$p_n = P(X_n \equiv 0 \mod 2 \mid Y_n = \varnothing)P(Y_n = \varnothing) + P(X_n \equiv 0 \mod 2 \mid Y_n = \{n\})P(Y_n = \{n\}).$$

Donc en notant $Z_{n-1} = X_n \setminus Y_n$ qui est une partie de $\{1, \ldots, n-1\}$, on obtient

$$\begin{aligned}p_n &= P(Z_n \equiv 0 \mod 2)P(Y_n = \varnothing) + P(Z_n \equiv 1 \mod 2)P(Y_n = \{n\}) \\ &= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}(1 - p_{n-1}) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Par double comptage, on en déduit que $\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} = 2^n \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} P(|X_n| = 2k) = 2^n p_n = 2^{n-1}$.

Solution 287. (énoncé) Pour $0 \leqslant k \leqslant N$, notons B_k l'évènement "On tire les boules dans l'urne k" et pour $n \in \mathbb{N}$, notons A_n l'évènement "Les n premières boules tirées sont blanches". Il est tout d'abord clair que pour tout $0 \leqslant k \leqslant N$,

$$P(A_n \mid B_k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Puisque les B_k forment une partition de l'univers Ω, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \sum_{k=0}^{N} P(A_n \mid B_k) P(B_k) \\ &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n. \end{aligned}$$

Solution 288. (énoncé) Notons C_k l'évènement

« La pièce fait face au k-ième lancer. »

On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(A_{2k+1}) = P(C_{2k+1} \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} (\overline{C_{2j}} \cap C_{2j-1})) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Et de même,

$$P(B_{2k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}.$$

Alors si l'on note A_∞ (resp. B_∞) l'évènement :

« Le joueur A (resp. B) gagne au k-ième lancer. »

alors $A_\infty = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} A_{2k+1}$ et $B_\infty = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_{2k}$, donc

$$P(A_\infty) = \sum_{k=0}^{n-1} P(A_{2k+1}) = \frac{1}{2} \frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$$

et

$$P(B_\infty) = \sum_{k=1}^{n} P(B_{2k}) = \frac{1}{4} \frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

Finalement, la probabilité que ni A, ni B ne gagne est donnée par

$$1 - P(A_\infty \sqcup B_\infty) = 1 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution 289. (énoncé) Tour d'abord, par hypothèse, il existe un réel positif $\lambda > 0$ tel que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité de l'évènement

« U_k : On a choisit de tirer dans l'urne k. »

soit $P(B_k) = \lambda k$. Puisque la somme de ces probabilités doit être égale à 1 (les évènements B_k forment une partition de l'univers), on a $\lambda = \frac{2}{n(n+1)}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k) P(B_k) = \lambda \binom{n+1}{p}^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{p} k$$

En notant
$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{p} k = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} k,$$
on calcule alors
$$S_{n,p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}(k+1) - \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = (p+1) \sum_{k=p+1}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}.$$
Or,
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1},$$
puisque cela revient à compter de deux manières le nombre de façons de choisir un sous-ensemble à $p+1$ éléments de $\{0, \dots, n\}$. Pour le voir, on distingue selon l'élément k maximal de l'ensemble choisi. (on peut également le montrer avec la formule de Pascal)
Donc
$$P(A) = \frac{2}{n(n+1)} \frac{1}{\binom{n+1}{p}} \left((p+1)\binom{n+2}{p+2} - \binom{n+1}{p+1} \right).$$

Solution 290. (énoncé) On remarque que $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap \overline{B})$ et une expression similaire pour B. On en déduit que
$$\begin{aligned} P(A)P(B) &= (P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}))(P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)) \\ &= P(A \cap B) \left(P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + \frac{P(A \cap \overline{B})P(\overline{A} \cap B)}{P(A \cap B)} \right). \end{aligned}$$
Or, on remarque également que $\Omega = (A \cap B) \sqcup (A \cap \overline{B}) \sqcup (\overline{A} \cap B) \sqcup (\overline{A} \cap \overline{B})$, donc
$$P(A)P(B) = P(A \cap B) \,\text{ssi}\, \frac{P(A \cap \overline{B})P(\overline{A} \cap B)}{P(A \cap B)}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Solution 291. (énoncé) Notons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, on a
$$\begin{aligned} P(S_n \equiv 0 \mod 2) &= P(S_n \equiv 0 \mod 2 \mid X_n \equiv 0 \mod 2)P(X_n \equiv 0 \mod 2) + P(S_n \equiv 0 \mod 2 \mid X_n \equiv 1 \mod 2)P \\ &= \frac{1}{2} P(S_{n-1} \equiv 0 \mod 2) + \frac{1}{2} P(S_{n-1} \equiv 1 \mod 2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Solution 292. (énoncé) L'instant décrit est celui où l'enfant essaye de reprendre un bonbon dans une poche après avoir vidé tous les bonbons de cette poche (donc après y avoir pris n fois des bonbons), sans avoir pioché $n+1$ fois dans l'autre poche. Notons A_i l'évènement

« L'enfant pioche dans le paquet de gauche. »

Par symétrie, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a
$$\begin{aligned} P(X = n-k) &= 2P \left(A_{n+k+1} \cap \bigsqcup_{\substack{J \subset \{1,\dots,n+k\} \\ |J| = n}} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \cap \bigcap_{j \in \{1,\dots,n+k\} \setminus J} \overline{A_j} \right) \right) \\ &= 2 \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,n+k\} \\ |J| = n}} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+k+1} = \frac{1}{2^{n+k}} \binom{n+k}{n}. \end{aligned}$$

Solution 293. (énoncé) Tout d'abord, X_n est à valeurs dans $\{1,2,3\}$. Au vu des conditions de tirage, il est déjà clair que

$$P(X_n=1)=\left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

puisque cela revient à toujours tirer la boule marquée. Ensuite, puisque $X_n \geqslant X_{n-1}$,

$$\begin{aligned}P(X_n=2)&=P(X_n=2\mid X_{n-1}=1)P(X_{n-1}=1)+P(X_n=2\mid X_{n-1}=2)P(X_{n-1}=2)\\&=\frac{2}{3}\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{2}{3}P(X_{n-1}=2).\end{aligned}$$

En notant $a_n=P(X_n=2)$, on en déduit que

$$a_n=\frac{2}{3^n}+\frac{2}{3}a_{n-1}=\frac{2}{3^n}+\frac{2^2}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^2a_{n-2}=\dots$$

d'où l'on déduit que (puisque $a_0=0$)

$$a_n=\frac{1}{3^n}\sum_{k=1}^{n-1}2^k+\left(\frac{2}{3}\right)^n a_0=\frac{2}{3^n}(2^n-1).$$

Finalement, on calcule simplement $P(X_n=3)=1-P(X_n=1)-P(X_n=2)$.

Solution 294. (énoncé)

1) Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, on a par indépendance,

$$P(Y_1\leqslant k)=P(X_1\leqslant k,X_2\leqslant k,X_3\leqslant k)=\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

De même,

$$P(Y_3\geqslant k)=\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^3.$$

De cela, on déduit les lois de Y_1 et Y_3.

2) Il est clair que $Z_k\sim\mathcal{B}(3,\frac{k}{n})$, puisque $Z_k=\sum_{i=1}^3\mathbb{1}_{X_i\leqslant k}$ est une somme de variables de Bernouilli indépendantes de paramètre $\frac{k}{n}$. On remarque alors que $(Z_k\geqslant 2)=(Y_2\leqslant k)$ par double inclusion. Donc en notant $p_k=\frac{k}{n}$,

$$P(Y_2\leqslant k)=P(Z_k\geqslant 2)=P(Z_k=2)+P(Z_k=3)=3p_k^2(1-p_k)+p_k^3$$

Solution 295. (énoncé) Pour $k\in\{1,\dots,n\}$,

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=P(Y=k\mid X=k)P(X=k)+P(Y=k\mid X=0)P(X=0)\\&=P(X=k)+\frac{1}{n}P(X=0)\\&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+\frac{1}{n}(1-p)^n.\end{aligned}$$

Solution 296. (énoncé) On remarque déjà que $P(S_{2n+1}=0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puisque pour retourner au lampadaire 0, il faut faire autant de pas en avant qu'en arrière. Ainsi,

$$(S_{2n}=0)=\bigsqcup_{\substack{J\subset\{1,\dots,2n\},\\|J|=n}}\bigcap_{j\in J}(X_j=1)\cap\bigcap_{j\notin J}(X_j=0),$$

donc

$$P(S_{2n}=0)=\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,2n\},\\ |J|=n}} P(X_1=1)^n P(X_1=-1)^n=\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}.$$

Grâce à la formule de Stirling, on déduit que

$$P(S_{2n}=0)\sim\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{4^n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Avec (beaucoup) de théorie des probabilités supplémentaire, ceci permet d'affirmer qu'Oscar reviendra un nombre aussi grand de fois qu'on veut devant le lampadaire 0 en un temps fini !
Étudions le cas de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$. De nouveau, pour qu'un chemin revienne en 0, il faut qu'il soit de longueur paire, donc $P(S_{2n+1}=0)$. Ensuite, pour revenir en 0, il faut autant de pas e_1 que de pas $-e_1$ (disons k) et autant de pas e_2 que de pas $-e_2$ (disons ℓ). Ainsi, $k+\ell=n$, et donc

$$\begin{aligned}P(S_{2n}=0)&=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\\&=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\cdot\frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k)!}\cdot\left(\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!^2}\right)\\&=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!^2(n-k)!^2}.\end{aligned}$$

En multipliant en haut et en bas par $n!^2$, on obtient d'après la formule de Vandermonde

$$P(S_{2n}=0)=\frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}^2\sim\frac{1}{\pi n}.$$

Solution 297. (énoncé) Remarquons que pour $x,y\in\mathbb{N}\setminus\{(0,0)\}$, si l'on pose $m=\begin{pmatrix}x&x\\y&y\end{pmatrix}$, alors

$$m^2=\begin{pmatrix}x^2+xy & x^2+xy\\ xy+y^2 & xy+y^2\end{pmatrix},$$

donc $m^2=m$ si et seulement si $x(x+y)=x$ et $y(x+y)=y$. Ainsi, puisque x ou y est non nul, on a $x+y=1$ et donc puisque ce sont des entiers, $(x,y)\in\{(1,0),(0,1)\}$. On en déduit donc que la probabilité que M soit une matrice de projection est donnée par

$$\begin{aligned}P(M)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)&=2P(X=0)P(X=1)\\&=2(1-p)^n np(1-p)^{n-1}=2np(1-p)^{2n-1}.\end{aligned}$$

Solution 298. (énoncé) On remarque que les colonnes de M sont $X_1U^T,\dots,X_nU^T$, donc le rang de M est au plus 1. Il est nul si et seulement si $X_1=\ldots=X_n=0$, donc

$$P(R=0)=P(X_1=0)^n=(1-p)^n,$$

et $P(R=1)=1-(1-p)^n$. Ensuite, un simple calcul montre que $\mathrm{Tr}(M)=X_1^2+\cdots+X_n^2=X_1+\cdots+X_n$, puisque les X_i valent 0 ou 1. Or, les $X_1,\dots,X_n$ sont indépendants, donc $T=X_1+\cdots+X_n\sim\mathcal{B}(n,p)$. Enfin, M est une matrice de projection si et seulement si $M^2=M$, or $UU^T=T$, donc

$$M^2=U^TUU^TU=TM,$$

d'où
$$P(M^2 = M, M \neq 0) = P(X_1 = 1, \dots, X_n = 1) = P(X_1 = 1)^n = p^n.$$

Solution 299. (énoncé) Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.
Supposons déjà que X et Y sont indépendantes. Alors puisque $P(Y = 1) > 0$, la colonne j de A est
$$C_j = \begin{pmatrix} P(X=1)P(Y=j) \\ \vdots \\ P(X=n)P(Y=j) \end{pmatrix} = \frac{P(Y=j)}{P(Y=1)} C_1,$$
ce qui montre bien que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Alors pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, il existe un réel λ_j tel que $C_j = \lambda_j C_1$ (on sait que $C_1 \neq 0$, puisque la somme de ses coefficients est égale à $P(Y = 1) > 0$). En sommant les coefficients de part et d'autre, on a
$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = i, Y = j) = \lambda_j \sum_{i=1}^{n} P(X = i, Y = 1) = \lambda_j P(Y = 1),$$
d'où $\lambda_j = \frac{P(Y=j)}{P(Y=1)}$. On en déduit que pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,
$$P(X = i, Y = j) = \lambda_j P(X = i, Y = 1) = \frac{P(Y = j)P(X = i, Y = 1)}{P(Y = 1)},$$
donc cette fois-ci en sommant sur j, on obtient
$$P(X = i) = \frac{P(X = i, Y = 1)}{P(Y = 1)}$$
ce qui permet finalement d'affirmer que $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$.

Solution 300. (énoncé)

1) On a par indépendance,
$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= \sum_{k=0}^{n+m} P(X+Y=k)t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{j=0}^{k} P(X=j)P(Y=k-j)t^k = G_X(t)G_Y(t). \end{aligned}$$

2) La question revient à se demander s'il existe deux variables aléatoires indépendantes X, Y à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$ telles que $X + Y \sim \mathcal{U}(\{2, \dots, 12\})$.
Calculons déjà le polynôme générateur d'une variable aléatoire U de loi unifome sur $\{2, \dots, 12\}$,
$$G_U(t) = \sum_{k=0}^{12} P(U=k)t^k = \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} t^k = \frac{t^2}{11}\frac{t^1 1 - 1}{t - 1}.$$
On doit donc avoir $G_U(t) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$. Or, il est clair qu'il existe deux polynômes $P(t), Q(t) \in \mathbb{R}[t]$ de degré 5 tels que $G_X(t) = tP(t)$ et $G_Y(t) = tQ(t)$. Donc,
$$P(t)Q(t) = \frac{1}{11}\frac{t^1 1 - 1}{t - 1} = \frac{1}{11}\prod_{k=1}^{10}(t - \omega^k),$$
où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. Or, $P(t)$ et $Q(t)$ sont tous deux à coefficients réels, donc pour tout $1 \leqslant k \leqslant 10$, si ω^k est racine de $P(t)$ (resp. $Q(t)$), alors $\overline{\omega^k} = \omega^{-k}$ en est également racine. Puisque pour tout $1 \leqslant k \leqslant 10$, $\omega^k \neq \omega^{-k}$ (car 11 est impair), $P(t)$ et $Q(t)$ doivent chacun avoir un nombre pair de racines, ce qui est impossible puisqu'ils sont chacun de degré 5.